Große Abweichungen und lokale Grenzwertsätze für Markov-Ketten auf eindimensionalen Hypergruppen

Martin Ehring

Mathematisches Institut der Technischen Universität München

Große Abweichungen und lokale Grenzwertsätze für Markov-Ketten auf eindimensionalen Hypergruppen

Martin Ehring

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. K. Ritter

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. E. Thoma
2. Prof. Dr. R. Lasser, Universität Lübeck

Die Dissertation wurde am 21. 11. 1994 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 15. 3. 1995 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wenn man den Leuten nur begreiflich machen könnte, daß es mit der Sprache wie mit den mathematischen Formeln sei—sie machen eine Welt für sich aus—sie spielen nur mit sich selbst, drücken nichts als ihre wunderbare Natur aus, und eben darum sind sie so ausdrucksvoll—eben darum spiegelt sich in ihnen das seltsame Verhältnisspiel der Dinge.
(*Novalis*)

Eines der zentralen Themen der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie bilden Grenzwertsätze für Summen unabhängiger, identisch verteilter reellwertiger Zufallsvariablen. Dabei beruhen viele Beweise darauf, daß durch die Gruppenstruktur auf $\mathbb{R}$ eine Faltung auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße induziert wird und daß die Fouriertransformation mit dieser Faltung verträglich ist.
Das Konzept von Summen unabhängiger Zufallsvariablen läßt sich in zwei Richtungen verallgemeinern. Einerseits besteht die Möglichkeit, die Gruppe $\mathbb{R}$ durch eine beliebige (topologische) Gruppe G zu ersetzen und Folgen von Zufallsvariablen mit Werten in G und ihre Summen (bzw. Produkte im nichtkommutativen Fall) zu betrachten. Grenzwertsätze für Zufallsvariablen mit Werten in einer Lie-Gruppe sind etwa in [18] zu finden.
Eine weitere Möglichkeit der Verallgemeinerung ergibt sich aus der Tatsache, daß Summen unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen zeitlich homogene Markov-Ketten bilden, deren Zustandsraum die zugrundeliegende Gruppe G ist. Auch unter diesem Gesichtspunkt spielt die von der Gruppenstruktur erzeugte Faltung $*$ eine besondere Rolle: Die Übergangsfunktion der Markov-Kette ist gegeben durch

$$P(x;A) := P(\sum_{k=1}^{n} X_k \in A \mid \sum_{k=1}^{n-1} X_k = x) = \delta_x * \mu(A).$$

Dabei ist $n \in \mathbb{N}, x \in G, A \in \mathcal{B}(G)$ und μ die gemeinsame Verteilung der Summanden X_k. Dies legt es nahe, allgemeiner Markov-Ketten zu untersuchen, deren Zustandsraum eine algebraische Struktur trägt, die die Definition einer Faltung erlaubt, und deren Übergangsfunktion ebenfalls die obige Gleichung erfüllt. Einen möglichen Kandidaten stellt das Konzept der kommutativen Hypergruppen bereit. Hier steht zwar keine Struktur mehr auf dem zugrundeliegenden Raum selbst zur Verfügung, aber eine Faltung auf der Maßalgebra und eine mit dieser Faltung verträgliche Fouriertransformation. Die genaue Definition einer Hypergruppe, viele Beispiele und die allgemeine Theorie der harmonischen Analyse auf Hypergruppen findet man in [4]. Wir betrachten also im folgenden Markov-Ketten, deren Zustandsraum eine Hypergruppe $(K, *)$ ist, und die eine Übergangsfunktion der Form

$$P(x; A) := \delta_x * \mu(A)$$

mit $x \in K, A \in \mathcal{B}(K)$ und $\mu \in M^1(K)$ besitzen.
Mit Hilfe des in [48] definierten Begriffs der sogenannten Konkretisierung einer Hypergruppe läßt sich die Ähnlichkeit solcher Markov-Ketten zu Summen unabhängiger Zufallsvariablen noch deutlicher fassen.

Welchen Wert hat nun dieses Vorgehen abgesehen von der reinen Verallgemeinerung? Es zeigt sich, daß dieses Konzept zumindest zwei interessante Klassen von Markov-Ketten beinhaltet. Dies sind zum einen bestimmte Markov-Ketten auf $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N}_0^2$, die als ein- beziehungsweise zweidimensionale stochastische Populationswachstumsmodelle verwendet werden (vgl. etwa [21]). Zum anderen handelt es sich um Summen unabhängiger Zufallsvariablen mit isotropen Verteilungen. Ein wichtiges Beispiel hierfür sind Summen radialsymmetrischer Zufallsvariablen im $\mathbb{R}^n$ (siehe [24]). Im ersten Fall trägt der Zustandsraum die Struktur einer polynomialen Hypergruppe, im zweiten Fall die einer Sturm-Liouville-Hypergruppe. Für diese Hypergruppen-Klassen wurden in [43]–[42], [48] und [46] eine Reihe von Grenzwertsätzen bewiesen, darunter zentrale Grenzwertsätze und Gesetze der großen Zahlen. Diese werden in der vorliegenden Arbeit durch zwei weitere Typen von Grenzwertsätzen ergänzt: Das Prinzip der großen Abweichungen und lokale Grenzwertsätze.

Die Arbeit gliedert sich dabei wie folgt:
Markov-Ketten auf polynomialen Hypergruppen gehören zur gut untersuchten Klasse der Markov-Ketten mit diskretem Zustandsraum. Im ersten Kapitel werden sie in diesen Rahmen eingebettet. Wir definieren Markov-Ketten auf polynomialen Hypergruppen durch eine Gleichung, die auch dann noch sinnvoll ist, wenn das orthogonale Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine polynomiale Hypergruppe bildet. Da es interessante Beispiele gibt, die nur dieser erweiterten Definition genügen, betrachten wir allgemeiner sogenannte P_n-homogene Markov-Ketten.
Zunächst wird eine Integral-Darstellung für die Übergangswahrscheinlichkeiten

hergeleitet. Mit Hilfe dieser Integral-Darstellung können wir dann Kriterien für Transienz oder Rekurrenz P_n-homogener Markov-Ketten angeben. Dabei stellt sich heraus, daß es unter milden Bedingungen an das Polynomsystem genügt, das Verhalten der einfachen Irrfahrt zu kennen, um alle P_n-homogenen Markov-Ketten bezüglich dieses Polynomsystems klassifizieren zu können. Unter der einfachen Irrfahrt verstehen wir dabei die Markov-Kette, deren Trajektorien nur Sprünge der Größe eins besitzen. Das Verhalten der einfachen Irrfahrt wiederum hängt nur von der Gestalt des Orthogonalisierungsmaßes ab. Diese Situation ähnelt der für Summen unabhängiger Zufallsvariablen auf $\mathbb{Z}^n$. Dort entscheidet die Integrierbarkeit einer bestimmten Funktion über Transienz oder Rekurrenz, die ihrerseits nur von der Dimension n abhängt ([35], T8.2).

Das Prinzip der großen Abweichungen ist das Thema des zweiten Kapitels. Dazu beweisen wir zunächst eine Variante eines Satzes von Ellis, die dem Umstand Rechnung trägt, daß alle im weiteren betrachteten Zufallsvariablen nur nichtnegative Werte annehmen. Mit Hilfe dieses Satzes formulieren wir dann das Prinzip der großen Abweichungen für P_n-homogene Markov-Ketten, das den Satz von Cramér verallgemeinert. Die Ratenfunktion steht dabei im selben Zusammenhang zur Fouriertransformierten wie im klassischen Fall.
Für den Beweis benötigen wir Aussagen über das Wachstumsverhalten der Polynome außerhalb ihres Orthogonalisierungsintervalls, die es ermöglichen, die Polynome mit der Exponentialfunktion zu vergleichen. Diese Abschätzungen können wir herleiten, sofern das Polynomsystem in der Nevai-Klasse $M(0,1)$ enthalten ist oder asymptotisch periodische Rekursionskoeffizienten besitzt.
Analoge Abschätzungen stehen auch für die multiplikativen Funktionen auf Sturm-Liouville-Hypergruppen zur Verfügung. Daher können wir auch für Markov-Ketten auf Sturm-Liouville-Hypergruppen die Gültigkeit des Prinzips der großen Abweichungen nachweisen.
Diese Sätze setzen allerdings immer voraus, daß die zugehörigen Verteilungen kompakten Träger besitzen. Auf diese technische Voraussetzung kann—zumindest bei der hier verwendeten Beweismethode—leider nur in Spezialfällen verzichtet werden. Diese Bedingung benötigen wir, um die Abschätzung nach unten im Prinzip der großen Abweichungen zu beweisen. Die Abschätzung nach oben können wir unter geeigneten Wachstumsbedingungen an die Verteilung sogar sehr viel allgemeiner für beliebige normalisierte schwache Hypergruppen auf $\mathbb{R}_+$ beweisen.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns mit lokalen Grenzwertsätzen für P_n-homogene Markov-Ketten, deren Polynomsysteme zu Jacobi-Polynomen verwandt sind. Darunter verstehen wir zum einen Polynomsysteme, deren Rekursionskoeffizienten das gleiche asymptotische Verhalten zeigen wie die der Jacobi-Polynome. Zum anderen sind die sogenannten Scheiben-Polynome auf der Einheitskreisscheibe gemeint, die ihrer expliziten Gestalt wegen mit den Jacobi-Polynomen verwandt sind. Diese lokalen Grenzwertsätze benutzen wir anschließend, um für den Fall der einfachen Irrfahrt ein Analogon zum Integral-Test von Dvoretzky-Erdös

zu erhalten.
Ein Vergleich der Beweise mit den Beweisen im klassischen Fall, die man etwa in [19] findet, zeigt, daß sie sich zwar der gleichen Idee bedienen, aber erheblich komplizierter sind. Dies hat seinen Grund darin, daß die Grenzverteilung (hier eine Raleigh-Verteilung) auf einer anderen Hypergruppe (der Bessel-Hypergruppe) definiert ist als die Verteilungen der Markov-Kette, während im klassischen Fall alle Verteilungen auf $\mathbb{R}$ selbst oder einer Untergruppe definiert sind.

Im letzten Kapitel schließlich geben wir eine Klasse polynomialer Hypergruppen an, deren Rekursionskoeffizienten ein asymptotisch periodisches Verhalten aufweisen. Diese Polynome sind insofern von Interesse, als sie das—soweit dem Autor bekannt ist—einzige Beispiel einer polynomialen Hypergruppe darstellen, deren Rekursionskoeffizienten nicht konvergieren.

Um das Lesen dieser Arbeit zu erleichtern, sind in einem Anhang einige häufiger benutzte Definitionen und Aussagen über orthogonale Polynomsysteme, modifizierte Momente und Eigenschaften konvexer Funktionen zusammengestellt. Begriffe und Definitionen für Markov-Ketten, soweit sie nicht im Text eingeführt werden, verwenden wir wie in [14].

Teile des zweiten Kapitels wurden in [11] vorveröffentlicht[1] und unter dem Titel „A large deviation principle for polynomial hypergroups“ auf der Tagung „Applications of hypergroups and related measure algebras“ (1–6.8.1993, Seattle, U.S.A.) vorgetragen.

Ich möchte mich bedanken bei Herrn Professor Dr. R.Lasser, der mir die Abfassung der Dissertation in seiner Arbeitsgruppe ermöglicht hat und stets zu Diskussionen bereit war. Ebenso gilt mein Dank Herrn Professor Dr. E.Thoma für die Übernahme eines Gutachtens wie auch Herrn Hochschuldozent Dr. M.Voit für seine Anregungen und Hilfe.
Daneben danke ich meinen Kollegen, vor allem Dr. V.Hösel, M.Lindlbauer und M.Nießner, für ihre Bereitschaft, meine mathematischen Probleme zu diskutieren.
Am meisten aber verdanke ich meinen Eltern, ohne deren Unterstützung ich sicher nicht nur diese Arbeit nicht geschrieben hätte.

[1]Mit Genehmigung des Dekans der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München vom 2. 8. 1993

Kapitel 1

P_n-homogene Markov-Ketten

1.1 P_n-homogene Markov-Ketten

Gegeben sei ein orthogonales Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie in A.1. Dann induzieren die Linearisierungskoeffizienten $g(m,n,k)$ von $P_n(x)$ eine (i.a. nicht positive) Faltungsstruktur auf der Menge aller Punktmaße auf $\mathbb{N}_0$ gemäß

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(m,n,k)\delta_k,$$

die bilinear und assoziativ auf die Menge aller komplexen Maße mit endlichem Träger auf $\mathbb{N}_0$ fortgesetzt werden kann.
Aus $P_n(x_0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt außerdem, daß das Faltungsprodukt zweier W-Maße wieder ein W-Maß ist, sofern es ein positives Maß ist.

Mit Hilfe dieser Faltungsstruktur definieren wir:

Definition 1.1.1

(i) Ein W-Maß μ auf $\mathbb{N}_0$ heißt *zulässig für* $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, falls $\delta_i * \mu$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ existiert und ein positives Maß (und damit ein W-Maß) ist.

(ii) Eine Übergangsmatrix $P = (P_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ heißt *P_n-homogen (mit Verteilung μ)*, falls ein zulässiges W-Maß μ auf $\mathbb{N}_0$ existiert so, daß für alle i und j gilt

$$P_{ij} = \delta_i * \mu(\{j\}). \tag{1.1}$$

(iii) Eine Markov-Kette X mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ heißt *P_n-homogen*, falls die zugehörige Übergangsmatrix P P_n-homogen ist.

Bemerkung:
(1.1) impliziert $P_{0k} = \mu(\{k\})$. Damit ist eine äquivalente Formulierung:
P ist P_n-homogen genau dann, wenn

$$P_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k,i,j) P_{0k} = \sum_{k=|i-j|}^{i+j} g(k,i,j) P_{0k}. \tag{1.2}$$

Dabei folgt die zweite Gleichung aus der Tatsache, daß $g(k,i,j) \neq 0$ genau dann gilt, wenn $g(i,j,k) \neq 0$.

Beispiele:

(i) Sind alle Linearisierungskoeffizienten $g(m,n,k)$ nicht negativ, so wird $M(\mathbb{N}_0)$ mit obiger Faltung zu einer kommutativen Banach-Algebra. Mit der Identität als Involution und 0 als neutralem Element ist $(\mathbb{N}_0, *)$ dann ein kommutative Hypergruppe und heißt *polynomiale Hypergruppe* (vgl. [25]). In diesem Fall ist jedes W-Maß μ zulässig und man nennt P_n-homogene Markov-Ketten *random walks* (siehe [16]).

(ii) Ein weiteres wichtiges Beispiel entsteht folgendermaßen:
Für jedes Polynomsystem ist das Maß $\mu = \mu_0\delta_0 + \mu_1\delta_1$ ($\mu_0, \mu_1 \geqslant 0, \mu_0 + \mu_1 = 1$) zulässig. Solche P_n-homogenen Markov-Ketten heißen in [21] ebenfalls random walk. Die P_n-homogene Markov-Kette mit Verteilung δ_1 wird im folgenden *einfache Irrfahrt* genannt.

(iii) Für ein beliebig vorgegebenes Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit negativen Linearisierungskoeffizienten ist es im allgemeinen schwierig zu entscheiden, ob neben der einfachen Irrfahrt weitere P_n-homogene Markov-Ketten existieren.
Sind jedoch die ersten Linearisierungskoeffizienten positiv, etwa $g(m,n,k) \geqslant 0$ für $m \leqslant m_0,\ k,n \in \mathbb{N}_0$, so ist offensichtlich jedes W-Maß μ auf $\mathbb{N}_0$ mit $\operatorname{Tr}\mu \subseteq [0,m_0]$ zulässig für $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ein Beispiel hierfür bildet die zweiparametrige Erweiterung $\{T_n(x;a,b)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Griñspun-Polynome aus [26]. Diese erfüllen $g(2,n,k) \geqslant 0$ für $a \geqslant 2$ und $b \geqslant \max\{1, \frac{2a}{3a-4}\}$ und $g(3,n,k) \geqslant 0$ für $a \geqslant 2$ und $b \geqslant \frac{3a-2}{2a-2}$. Dies zeigt man mit Hilfe der Rekursiongleichungen für die Linearisierungskoeffizienten aus [25].

Um interessante Aussagen über P_n-homogene Markov-Ketten erhalten zu können, sind zusätzliche Bedingungen, sei es an das Maß μ, sei es an das Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nötig. Daher sei ab jetzt stets eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt:

(a) $\operatorname{Tr}\mu$ ist endlich oder

(b) Es existieren Konstanten C_1 und C_2 mit:

$$|g(m,n,k)| \leqslant C_1 \text{ gleichmäßig in n,m und k und } \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\operatorname{Tr}\pi} |P_n(x)| \leqslant C_2.$$

Lemma 1.1.2
Es sei μ ein zulässiges W-Maß und P P_n-homogen mit Verteilung μ. Dann gilt:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $\mu^{(n)}$, das n-fache Faltungsprodukt von μ mit sich selbst, und ist ein W-Maß. Es ist gegeben durch $\mu^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0k}^{(n)} \delta_k$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist das W-Maß $\mu^{(n)}$ zulässig und $P^{(n)}$ ist P_n-homogen mit Verteilung $\mu^{(n)}$.

(iii) P ist reversibel bezüglich $\{\pi_n\}$, d.h. $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$. Insbesondere ist $\{\pi_n\}$ ein positives invariantes Maß für P.

Beweis:

(i) Für $n = 1$ ist dies richtig. Sei also $n \geqslant 2$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mu^{(n-1)}$ ein W-Maß. Außerdem ist

$$0 \leqslant \delta_k * \mu(\{j\}) = \sum_{l=0}^{\infty} g(k,l,j)\mu(\{l\}) \leqslant 1$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$.
Also ist auch

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k * \mu^{(n-1)}(\{k\}) \leqslant 1$$

und

$$\mu^{(n)}(\{j\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} g(k,l,j)\mu(\{l\}) \right) \mu^{(n-1)}(\{k\}).$$

ist wohldefiniert für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Die übrigen Behauptungen folgen, falls gezeigt werden kann, daß für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ $\mu^{(n)}(\{j\}) = P_{0j}^{(n)}$ gilt. Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} P_{0j}^{(n)} &= \sum_{l=0}^{\infty} P_{0l}^{(n-1)} P_{lj} \overset{(1.2)}{=} \sum_{l=0}^{\infty} P_{0l}^{(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} g(k,l,j)\mu(\{k\}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(k,l,j)\mu(\{k\})\mu^{(n-1)}(\{l\}) = \mu_j^{(n)}. \end{aligned}$$

(ii) Beweis durch Induktion nach n:
$n = 1$ ist die Definition. Für $n > 1$ reicht es offensichtlich zu zeigen, daß für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ $P_{ij}^{(n)} = \delta_i * \mu^{(n)}(\{j\})$ ist. Da $*$ assoziativ ist für Maße mit

endlichem Träger, erhalten wir für $i, j, l, m \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

(1.3)
$$\sum_{k=|i-j|}^{i+j} g(l,m,k)g(k,i,j) = \delta_i * (\delta_l * \delta_m)(\{j\})$$
$$= (\delta_i * \delta_l) * \delta_m(\{j\}) = \sum_{k=|i-l|}^{i+l} g(i,l,k)g(k,m,j).$$

Für festes $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt $g(k,i,j) \neq 0$ genau dann, wenn $g(i,j,k) \neq 0$ und daher

$$\begin{aligned}
\delta_i * \mu^{(n+1)}(\{j\}) &= \sum_{k=0}^{\infty} g(k,i,j)\mu^{(n+1)}(\{k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} g(k,i,j) \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} g(l,m,k)\mu(\{m\})\mu^{(n)}(\{l\}) \\
&= \sum_{k=|i-j|}^{i+j} g(k,i,j) \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} g(l,m,k)\mu(\{m\})\mu^{(n)}(\{l\}) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=|i-j|}^{i+j} g(k,i,j)g(l,m,k)\mu(\{m\})\mu^{(n)}(\{l\}) \\
&\overset{(1.3)}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=|i-l|}^{i+l} g(i,l,k)g(k,m,j)\mu(\{m\})\mu^{(n)}(\{l\}) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=|i-l|}^{i+l} g(i,l,k)\mu^{(n)}(\{l\}) \sum_{m=0}^{\infty} g(k,m,j)\mu(\{m\}) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=|i-l|}^{i+l} g(i,l,k)\mu^{(n)}(\{l\})P_{kj}.
\end{aligned}$$

Der Beweis ist beendet, wenn gezeigt ist, daß in der letzten Zeile die Summationsreihenfolge vertauscht werden kann, denn

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} g(i,l,k)\mu^{(n)}(\{l\})P_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)}P_{kj} = P_{ij}^{(n)}.$$

Dies ist trivial, falls $\operatorname{Tr}\mu$ endlich ist, da in diesem Fall auch $\mu^{(n)}$ endlichen Träger besitzt. Ist $\operatorname{Tr}\mu$ nicht endlich, aber $|g(m,n,k)| < C$ gleichmäßig in

m, n und k, so ist

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|g(i,l,k)|P_{kj}\mu^{(n)}(\{l\}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi_k}{\pi_i}|g(l,k,i)|P_{kj}\mu^{(n)}(\{l\})$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi_j}{\pi_i}|g(l,k,i)|P_{jk}\mu^{(n)}(\{l\}) \leqslant C\frac{\pi_j}{\pi_i} < \infty.$$

(iii) Es gilt $\pi_n g(m,n,k) = \pi_k g(m,k,n)$. Daher ist

$$\pi_i P_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_i g(k,i,j)P_{0k} = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_j g(k,j,i)P_{0k} = \pi_j P_{ji}$$

und

$$\pi_j = \pi_j\sum_{i=0}^{\infty}P_{ji} = \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij}.$$

□

1.2 Eine Integral-Darstellung für die Übergangsmatrizen

Es sei P eine P_n-homogene Übergangsmatrix mit Verteilung μ. Unter den obigen Voraussetzungen

(a) $\operatorname{Tr}\mu$ ist endlich oder

(b) Es existieren Konstanten C_1 und C_2 mit:

$$|g(m,n,k)| \leqslant C_1 \text{ gleichmäßig in n,m und k und } \sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in\operatorname{Tr}\pi}|P_n(x)| \leqslant C_2$$

konvergiert für $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0)$

$$\hat{\mu}(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\mu(\{k\})P_k(x)$$

absolut und gleichmäßig auf $\operatorname{Tr}\pi$ und heißt die *Fourier-Transformierte* von μ. Sie hat folgende Eigenschaften:

Lemma 1.2.1
Ist μ ein zulässiges W-Maß, so gilt für $x \in \operatorname{Tr}\pi$ und $i \in \mathbb{N}_0$:

$$\widehat{\delta_i * \mu}(x) = P_i(x)\,\hat{\mu}(x) \quad \text{und} \quad \widehat{\mu^{(n)}}(x) = (\hat{\mu}(x))^n\,.$$

Insbesondere gilt

$$\hat{\mu}^n(x)\,P_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} P_j(x).$$

Beweis: Formal erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(x)P_i(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=|k-i|}^{k+i} g(k,i,j)P_j(x)\right)\mu(\{k\}) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} g(k,i,j)P_j(x)\right)\mu(\{k\}) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k,i,j)\mu(\{k\})\right)P_j(x) \overset{(1.2)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}P_j(x) = \widehat{\delta_i * \mu}(x).
\end{aligned}$$

Dabei gilt (1) unter Voraussetzung (a) trivialerweise, da dann alle auftretenden Summen endlich sind.
Gilt (b), so darf die Summation vertauscht werden, denn für festes i ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} |g(k,i,j)P_j(x)|\right)\mu(\{k\}) &\leqslant C_2 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=|k-i|}^{k+i} |g(k,i,j)|\mu(\{k\}) \\
&\leqslant C + C_2 \sum_{k=i}^{\infty}\sum_{j=k-i}^{k+i} |g(k,i,j)|\mu(\{k\}) \\
&\leqslant C + C_1C_2(2i+1)\sum_{k=i}^{\infty}\mu(\{k\}) \\
&\leqslant C + C_1C_2(2i+1) < \infty.
\end{aligned}$$

Zum zweiten Teil der Behauptung: Wieder ist formal

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}^{n+1}(x) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{(n)}(\{j\})P_j(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu(\{k\})P_k(x)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mu^{(n)}(\{j\})\sum_{k=0}^{\infty}\mu(\{k\})\sum_{l=0}^{\infty} g(k,j,l)P_l(x) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\mu^{(n)}(\{l\})\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)\sum_{k=0}^{\infty} g(k,j,l)\mu(\{k\}) \overset{(1.2)}{=} \sum_{j=0}^{\infty}P_{0j}^{(n)}\sum_{l=0}^{\infty}P_{jl}P_l(x) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}P_{0j}^{(n)}P_{jl}\right)P_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty}P_{0l}^{(n+1)}P_l(x) = \widehat{\mu^{(n+1)}}(x).
\end{aligned}$$

Unter Voraussetzung (a) sind (1) und (2) offensichtlich richtig. Also bleibt zu zeigen, daß unter Voraussetzung (b) die Summationsreihenfolgen vertauscht werden dürfen.
Für (1) wurde dies schon oben gezeigt und (2) gilt, da

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^{(n)} P_{jl} |P_l(x)| \leqslant C_2 \sum_{l=0}^{\infty} P_{0l}^{(n+1)} = C_2.$$

□

Bemerkung:
In Kapitel 2 wird der „Faltungssatz“ $\widehat{\mu^{(n)}}(x) = (\hat{\mu}(x))^n$ auch für $x > x_0$, also $x \notin \operatorname{Tr}\pi$, verwendet, falls $\operatorname{Tr}\mu$ endlich ist oder falls $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine polynomiale Hypergruppe erzeugt. Beachte dabei, daß für $x \geqslant x_0$ $P_n(x) > 0$ ist und damit $\hat{\mu}(x)$ wohldefiniert ist mit dem möglichen Wert $+\infty$. Somit ist dann der obige Beweis des Faltungssatzes richtig für Maße mit endlichem Träger. Sind alle Linearisierungskoeffizienten $g(m,n,k)$ nichtnegativ, so sind alle auftretenden Summanden positiv und die Vertauschung der Summationsreihenfolge ist auch in diesem Fall gerechtfertigt.

Satz 1.2.2 (Integraldarstellung von $P_{ij}^{(n)}$)
Es sei P eine P_n-homogene Übergangsmatrix mit Verteilung μ. Dann besitzt $P_{ij}^{(n)}$ die Integraldarstellung

$$P_{ij}^{(n)} = \pi_j \int (\hat{\mu}(x))^n P_i(x) P_j(x) d\pi(x).$$

Beweis: Dies folgt sofort aus Lemma 1.2.1 und der Orthogonalität von $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezüglich π. □

Nach [22], Theorem VII, existiert für jede Markov-Kette und jeden Zustand j ein W-Maß $\psi_{jj} \in M^1([-1,1])$ so, daß gilt

$$P_{jj}^{(n)} = \int_{-1}^{1} x^n d\psi_{jj}(x) \tag{1.4}$$

Dabei besteht folgender Zusammenhang zur Integral-Darstellung von Satz 1.2.2:

Korollar 1.2.3
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.2 ist

$$\psi_{jj} = \pi_j \hat{\mu}(P_j^2 \pi)$$

wobei $f(\nu)$ das Bildmaß von ν unter der Abbildung f bezeichnet.

Beweis:
Nach Voraussetzung existiert ein $C < \infty$ mit $\hat{\mu} : \operatorname{Tr} \pi \to [-C, C]$ und $\hat{\mu}$ ist stetig. Also erhält man mit Satz 1.2.2 und dem Transformationssatz für Integrale:

$$P_{jj}^{(n)} = \pi_j \int (\hat{\mu}(x))^n P_j^2(x) d\pi(x) = \pi_j \int_{-C}^{C} y^n d\hat{\mu}(P_j^2 \pi)(y).$$

Aufgefaßt als Maße auf $[-M, M]$ mit $M := \max\{\sup \operatorname{Tr} \pi, C\}$ haben μ_{jj} und $\pi_j \hat{\mu}(P_j^2 \pi)$ demnach die selben Momente.
Damit folgt die Behauptung, da auf Kompakta Maße durch ihre Momente eindeutig bestimmt sind ([9], Theorem III.5.7). □

Mit Hilfe von Korollar 1.2.3 kann $\hat{\mu}$ auf $\operatorname{Tr} \pi$ abgeschätzt werden. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.2.4
Es sei P eine beliebige reversible Übergangsmatrix und für $j \in \mathbb{N}_0$ sei $\mu_{jj} \in M^1([-1,1])$ das gemäß (1.4) zugehörige Maß.
Dann ist

$$\gamma_i := \lim_{n\to\infty} \left(P_{ii}^{(d_i n)}\right)^{1/d_i n}$$

die kleinste positive Zahl α mit $\operatorname{Tr} \mu_{jj} \subseteq [-\alpha, \alpha]$ für alle $j \in C(i)$.
Dabei bezeichnet C(i) die Menge aller mit i kommunizierenden Zustände und d_i die Periode von i.

Beweis: Für alle $j \in C(i)$ ist $\gamma_i = \lim_{n\to\infty} \left(P_{jj}^{(d_i n)}\right)^{1/d_i n}$ und $\left(P_{jj}^{(d_i n)}\right)^{1/d_i n} \leqslant \gamma_i$ ([23], Theorem X) und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(P_{jj}^{(d_i n)}\right)^{1/d_i n} = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{d_i n} d\mu_{jj}(x)\right)^{1/d_i n} \leqslant \alpha,$$

d.h. $\gamma_i \leqslant \alpha$.
Andererseits gilt nach Definition von α für jedes $\varepsilon > 0$ $\mu_{jj}(D_\varepsilon) > 0$, wobei $D_\varepsilon := [-\alpha, -(\alpha - \varepsilon)] \cup [\alpha - \varepsilon, \alpha])$ und somit

$$\begin{aligned}\gamma_i &\geqslant \left(P_{jj}^{(d_i n)}\right)^{1/d_i n} = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{d_i n} d\mu_{jj}(x)\right)^{1/d_i n} \geqslant \left(\int_{D_\varepsilon} x^{d_i n} d\mu_{jj}(x)\right)^{1/d_i n} \\ &\geqslant (\alpha - \varepsilon)\mu_{jj}(D_\varepsilon)^{1/d_i n}.\end{aligned}$$

Damit ist $\gamma_i \geqslant \alpha - \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. $\gamma \geqslant \alpha$. □

Korollar 1.2.5
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.2 gilt

$$\sup_{x \in \operatorname{Tr} \pi} |\hat{\mu}(x)| = \gamma_0 \leqslant 1.$$

Beweis: Ist $P_{00} = 1$, so ist nichts zu zeigen.
Andernfalls ist $C(0) \neq \{0\}$. Definiere $\delta := \sup_{x \in \operatorname{Tr} \pi} |\hat{\mu}(x)|$. Dann ist wegen Satz 1.2.2 $\gamma_0 \leqslant \delta$.
Weiter gibt es nach Definition von δ ein $y \in \operatorname{Tr} \pi$ mit $\delta = |\hat{\mu}(y)|$. Da $\hat{\mu}$ stetig ist, folgt mit Korollar 1.2.3

$$\hat{\mu}(y) \in \hat{\mu}(\operatorname{Tr} \pi) \subseteq \operatorname{Tr} \hat{\mu}(\pi) = \operatorname{Tr} \mu_{00} \subseteq [-\gamma_0, \gamma_0].$$

Folglich ist $\delta \leqslant \gamma_0$. □

1.3 Irreduzibilität und Periodizität

Für eine beliebige P_n-homogene Markov-Kette ist es schwierig, Kriterien für Irreduzibilität und Periodizität anzugeben. Man kann aber die folgenden einfachen Beobachtungen festhalten, die wir in Kapitel 3 benötigen werden.

Satz 1.3.1

(i) Die einfache Irrfahrt ist irreduzibel. Sie ist aperiodisch genau dann, wenn $b_n \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Ist $b_n \equiv 0$, so gilt für jede P_n-homogene Markov-Kette X mit Verteilung μ

(1) X ist reduzibel, falls $\operatorname{Tr} \mu \subseteq 2\mathbb{N}_0$.

(2) X hat Periode 2, falls $\operatorname{Tr} \mu \subseteq 2\mathbb{N}_0 + 1$.

(iii) Ist P P_n-homogen mit Verteilung μ, so sind alle Äquivalenz-Klassen von P stochastisch abgeschlossen und die Periode $d(i)$ erfüllt $d(i) \leqslant 2$ für jeden Zustand $i \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist P irreduzibel genau dann, wenn

$$R := \cup_{n \geqslant 1} \operatorname{Tr} \mu^{(n)} = \mathbb{N}_0.$$

Beweis:

(i) Es ist für $j > i$

$$P_{ij}^{(j-i)} \geqslant \prod_{k=0}^{j-i-1} P_{i+k\, i+k+1} = \prod_{k=i}^{j-1} a_k > 0$$

und analog für $i > j$

$$P_{ij}^{(i-j)} \geqslant \prod_{k=j+1}^{i} c_k > 0.$$

Ist $b_{n_0} \neq 0$, so ist der Zustand n_0 (und damit die einfache Irrfahrt) aperiodisch.

(ii) Nach Voraussetzung ist $P_{2n}(x)$ eine gerade Funktion und $P_{2n+1}(x)$ eine ungerade Funktion. Also folgt aus $\operatorname{Tr}\mu \subseteq 2\mathbb{N}_0$, daß $\hat{\mu}(x)$ eine gerade Funktion ist, und somit ist $\hat{\mu}(x)^n P_i(x) P_j(x)$ eine ungerade Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $i - j$ ungerade ist. Da $b_n \equiv 0$ ist, ist das Orthogonalisierungsmaß π symmetrisch ([9], Theorem I.4.3). Also ist $P_{0j}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls j ungerade ist, und X ist reduzibel.
Ist jedoch $\operatorname{Tr}\mu \subseteq 2\mathbb{N}_0 + 1$ und $i - j$ gerade, so ist

$$\hat{\mu}(x)^n P_i(x) P_j(x) = (-1)^n \hat{\mu}(-x) P_i(-x) P_j(-x)$$

und somit ist $P_{ij}^{(2n+1)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Aus Lemma 1.1.2 (iii) folgt $P_{ij}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow P_{ji}^{(n)} > 0$, da $\pi_k > 0$ für alle k.
Damit sind die Äquivalenzklassen abgeschlossen und $P_{ii}^{(2n)} > 0$ für alle n und i, also ist $d(i) \leqslant 2$. R ist die Äquivalenzklasse von 0. Da R stochastisch abgeschlossen ist, folgt sofort die Behauptung.

□

Korollar 1.3.2
Ist $(\mathbb{N}_0, *)$ *eine polynomiale Hypergruppe, so ist für einen random walk* X *mit Verteilung* μ *äquivalent:*

(i) X *ist irreduzibel.*

(ii)

$$R := \cup_{n \geqslant 1} \operatorname{Tr}\mu^{(n)} = \mathbb{N}_0.$$

(iii) Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \in \operatorname{Tr}\mu^{(n_0)}$.

Beweis: Es ist nur $(iii) \Rightarrow (ii)$ zu zeigen. Nun folgt aber aus (iii) induktiv $\{0, 1, \ldots, k\} \subseteq \cup_{l=n_0}^{(k+1)n_0} \operatorname{Tr}\mu^{(l)}$. Also gilt (ii). □

1.4 Transienz und Rekurrenz

Ist P eine beliebige irreduzible Übergangsmatrix, so ist $\lim_{n\to\infty} \left(P_{ij}^{(n)}\right)^{1/n} =: \gamma$ unabhängig von i und j ([22], Theorem X), wobei n die Residuenklasse R_{ij} von i und j bezüglich der Periode d von P durchläuft.
Nach dem Satz von Cauchy-Hadamard ist dann $R := 1/\gamma \geqslant 1$ der gemeinsame Konvergenzradius der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} x^n$.

Definition 1.4.1
Es sei P eine irreduzible Übergangsmatrix. Dann heißt P

(i) *R-transient*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} R^n < \infty$ ist für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$,

(ii) *R-rekurrent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} R^n = \infty$ ist für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$,

(iii) *R-positiv-rekurrent*, falls $\lim_{n\to\infty} R^n P_{ij}^{(n)} = c_{ij} > 0$ ist für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$, wobei n die Residuenklasse R_{ij} von i und j bezüglich der Periode d von P durchläuft, und

(iv) *R-null rekurrent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} R^n = \infty$ ist und $\lim_{n\to\infty} R^n P_{ij}^{(n)} = 0$ gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$.

In [39] wird gezeigt, daß diese Eigenschaften Klasseneigenschaften sind, d.h. sie gelten für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$, sobald sie für ein Paar i_0, j_0 gelten.

Satz 1.4.2
Es sei P eine irreduzible P_n-homogene Übergangsmatrix. Bezeichnet dann $\gamma := \sup_{\operatorname{Tr}\pi} |\hat{\mu}(x)| \leqslant 1$ und $R := 1/\gamma$, so gilt:

(i) P ist R-transient genau dann, wenn $\frac{1}{\gamma - \hat{\mu}(x)} \in L^1(\pi)$.

(ii) P ist R-rekurrent genau dann, wenn $\frac{1}{\gamma - \hat{\mu}(x)} \notin L^1(\pi)$.

(iii) P ist R-positiv rekurrent genau dann, wenn $\pi(\hat{\mu}^{-1}(\{\gamma\})) > 0$.

Beweis: Es genügt, (ii) und (iii) für $i = 0 = j$ zu zeigen, da (i) die negierte Form von (ii) ist.
Zu (ii):
Nach Voraussetzung ist $|\hat{\mu}(x)| \leqslant \gamma$ auf $\operatorname{Tr}\pi$; also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\mu}(x))^n s^n$ absolut und gleichmäßig auf $\operatorname{Tr}\pi$ für $0 < s < R$ und es gilt

$$P(s) := \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{(n)} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int (\hat{\mu}(x)s)^n d\pi(x) = \int \frac{d\pi(x)}{1 - \hat{\mu}(x)s}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } P \text{ R-rekurrent} &\Leftrightarrow \lim_{s\uparrow R} P(s) = \infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{s\uparrow R} \int \frac{d\pi(x)}{1 - \hat{\mu}(x)s} = \infty \\ &\Leftrightarrow \lim_{s\uparrow R} \int_{\{\hat{\mu}>0\}} \frac{d\pi(x)}{1 - \hat{\mu}(x)s} = \infty. \end{aligned}$$

Da $s \mapsto \frac{\mathbf{1}_{\{\hat{\mu}>0\}}}{1 - \hat{\mu}(x)s}$ monoton wächst, folgt die Behauptung mit dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Zu (iii):
Es ist

$$c_{00} = \lim_{n\to\infty} P_{00}^{(2n)} R^{2n} = \lim_{n\to\infty} \int (\hat{\mu}(x)/\gamma)^{2n}\, d\pi(x) = \pi(\hat{\mu}^{-1}(\gamma)) + \pi(\hat{\mu}^{-1}(-\gamma)).$$

Damit erhält man

$$P \text{ ist R-positiv rekurrent } \Leftrightarrow \pi(\hat{\mu}^{-1}(\gamma)) + \pi(\hat{\mu}^{-1}(-\gamma)) > 0.$$

Ist nun P aperiodisch, so gilt auch

$$c_{00} = \lim_{n\to\infty} P_{00}^{(2n+1)} R^{2n+1} = \pi(\hat{\mu}^{-1}(\gamma)) - \pi(\hat{\mu}^{-1}(-\gamma)).$$

Folglich ist $\pi(\hat{\mu}^{-1}(-\gamma)) = 0$ und P ist R-positiv rekurrent genau dann, wenn $\pi(\hat{\mu}^{-1}(\gamma)) > 0$.
Hat jedoch P die Periode 2, so ist $P_{00}^{(2n+1)} R^{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit ist in diesem Fall $\pi(\hat{\mu}^{-1}(\gamma)) = \pi(\hat{\mu}^{-1}(-\gamma)$. Die Behauptung gilt also auch, falls P die Periode 2 hat. □

Korollar 1.4.3

(i) Ist $\gamma < 1$, so gibt es ein $c > 1$ mit

$$P_{ij}^{(n)} \leqslant c^{-n}$$

für n groß genug, d.h. $P_{ij}^{(n)}$ konvergiert exponentiell schnell gegen 0.

(ii) Ist $A := \operatorname{Tr} \pi \backslash \{|\hat{\mu}| = \gamma\}$ abgeschlossen, so existieren ein $0 < \varrho < 1$ und ein $M_{i,j} > 0$ so, daß

$$|P_{ij}^{(r_i+2n)} R^{r_i+2n} - c_{ij}| \leqslant M_j \varrho^{r_i+2n}.$$

Dabei ist r_i so gewählt, daß $r_i + 2n$ genau die Residuenklasse von i und j bezüglich der Periode d von P durchläuft.

Beweis:

(i) Ist $\gamma < 1$, so existiert ein $1 < c < 1/\gamma = R$ und $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} c^n$ konvergiert.

(ii) Es gilt

$$c_{ij} = \pi_j \int_{\hat{\mu}=\gamma} P_i(x) P_j(x) d\pi(x) + (-1)^{r_i} \pi_j \int_{\hat{\mu}=-\gamma} P_i(x) P_j(x) d\pi(x),$$

denn es ist

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{r_i+2n} R^{r_i+2n} = \\ &= \pi_j \int_{\hat{\mu}=\gamma} P_i(x) P_j(x) d\pi(x) + (-1)^{r_i} \pi_j \int_{\hat{\mu}=-\gamma} P_i(x) P_j(x) d\pi(x) \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \pi_j \int_A \left(\frac{\hat{\mu}(x)}{\gamma}\right)^{r_i+2n} P_i(x) P_j(x) d\pi(x). \end{aligned}$$

Nun gilt auf A $\left(\frac{\hat{\mu}(x)}{\gamma}\right)^{r_i+2n} \to 0$ und $\left(\frac{|\hat{\mu}(x)|}{\gamma}\right)^{r_i+2n} |P_i(x)P_j(x)| < |P_i(x)P_j(x)| < \infty$. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Somit ist

$$\begin{aligned}|P_{ij}^{(r_i+2n)} R^{r_i+2n} - c_{ij}| &= |\pi_j \int_A \left(\frac{\hat{\mu}(x)}{\gamma}\right)^{r_i+2n} P_i(x)P_j(x)d\pi(x)| \\ &\leqslant C_{i,j} \int_A \left(\frac{|\hat{\mu}(x)|}{\gamma}\right)^{r_i+2n} d\pi(x),\end{aligned}$$

wobei $C_{i,j} := \sup_{x\in A} |P_i(x)P_j(x)|\pi_j$.
Dies beendet den Beweis mit $\rho := \sup_{x\in A} \left(\frac{|\hat{\mu}(x)|}{\gamma}\right) < 1$ und $M_{i,j} := C_{i,j}\pi(A)$.

□

Bemerkung:
Ein Beispiel für die Situation in Teil (ii) des obigen Korollars bildet die einfache Irrfahrt bzgl. der Karlin-McGregor-Polynome 1.Art, falls $a_1 + a_2 < 1$ (siehe Satz 4.2).

Korollar 1.4.4
P sei eine irreduzible und aperiodische P_n-homogene Übergangsmatrix. Dann sind äquivalent:

(i) *P ist (1-)positiv rekurrent.*

(ii) $\pi(\{x_0\}) > 0$.

Beweis: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*:
Lemma 1.1.2 zeigt, daß $\{\pi_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ ein positives subinvariantes Maß für P ist. [14], Theorem 2.24 liefert

$$P \text{ ist positiv rekurrent } \Rightarrow \infty > \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_i(x_0).$$

Nun gilt aber bekanntlich $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_i(x_0) < \infty \Leftrightarrow \pi(\{x_0\}) > 0$.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*:
Ist $\pi(\{x_0\}) > 0$, so ist $\hat{\mu}(x_0) = \gamma = 1$ und die Behauptung folgt aus Satz 1.4.2(iii).

□

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung an das zugrundeliegende Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ verhalten sich alle P_n-homogenen Übergangsmatrizen wie die einfache Irrfahrt. Um dies zu zeigen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.4.5
Es sei P eine beliebige irreduzible Übergangsmatrix, die eine Bandmatrix ist, d.h. es gibt ein k_0 so, daß $P_{ij} = 0$, falls $|i-j| > k_0$.
Dann ist P genau dann R-transient, wenn ein $n_0 \geqslant 1$ existiert derart, daß $Q := P^{(n_0)} R^{n_0}$-transient ist.

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß $\sum_{k=0}^{\infty} P_{00}^{(k)} R^k < \infty$, falls ein $n_0 > 1$ existiert derart, daß $P^{(n_0)}$ R^{n_0}-transient ist. Mit diesem n_0 ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P_{00}^{k} R^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n_0-1} P_{00}^{(kn_0+l)} R^{kn_0+l} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n_0-1}\sum_{j=0}^{\infty} P_{0j}^{(kn_0)} R^{kn_0} P_{j0}^{(l)} R^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n_0-1}\sum_{j=0}^{\infty} Q_{0j}^{(k)} R^{kn_0} P_{j0}^{(l)} R^l = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n_0-1}\sum_{j=0}^{lk_0} Q_{0j}^{(k)} R^{kn_0} P_{j0}^{(l)} R^l \\
&= \sum_{l=0}^{n_0-1}\sum_{j=0}^{lk_0} P_{j0}^{(l)} R^l \sum_{k=0}^{\infty} Q_{0j}^{(k)} R^{kn_0} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.4.6
Es gelte $\sup_{x\in \mathrm{Tr}\,\pi} |P_n(x)| = P_n(\delta)$, *wobei* δ *den rechten Randpunkt von* $\mathrm{Tr}\,\pi$ *bezeichnet. Dann gilt:*

(i) *Es sind äquivalent:*

(1) *Jede irreduzible P_n-homogene Markov-Kette, deren Verteilung μ endlichen Träger besitzt, ist R-transient mit R= $1/\hat{\mu}(\delta)$.*

(2) *Die einfache Irrfahrt ist R-transient mit* $R = 1/P_1(\delta)$.

(3) $(\delta - x)^{-1} \in L^1(\pi)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \pi_n P_n(\delta) P_{n+1}(\delta)} < \infty$

Induziert $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine polynomiale Hypergruppe, so ist die Voraussetzung erfüllt und (1) ist äquivalent zu*

($1'$) *Jeder irreduzible random walk mit Verteilung μ ist R-transient mit R= $1/\hat{\mu}(\delta)$.*

(ii) *Es sind äquivalent:*

(1) *Jede irreduzible P_n-homogene Markov-Kette ist R-positiv rekurrent mit R= $1/\hat{\mu}(\delta)$.*

(2) *Die einfache Irrfahrt ist R-positiv rekurrent mit* $R = 1/P_1(\delta)$.

(3) $\pi(\{\delta\}) > 0$.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\delta)\pi_n < \infty$

Insbesondere ist kein irreduzibler random walk auf einer polynomialen Hypergruppe R-positiv rekurrent.

Beweis:
Zu (i):
(1) $\Rightarrow$ (2) ist klar.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) folgt aus Satz 1.4.2(i), denn es ist $P_1(\delta) - P_1(x) = a_0(\delta - x)$.
(3) $\Leftrightarrow$ (4):
Da δ der rechte Randpunkt von $\operatorname{Tr}\pi$ ist, ist $P_n(\delta) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $Q_n(x) := \frac{P_n(x)}{P_n(\delta)}$. Dann ist $(\delta - x)^{-1} \in L^1(\pi) \Leftrightarrow (1 - Q_1(x)) \in L^1(\pi)$, d.h. (3) gilt genau dann, wenn die einfache Irrfahrt bzgl. $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 1-transient ist. Da aber $\pi_n^Q = \pi_n P_n^2(\delta)$ und $a_n^Q = \frac{a_n P_{n+1}(\delta)}{P_n(\delta)P_1(\delta)}$ gilt, folgt die Äquivalenz von (3) und (4) wie in [21].
(3) $\Rightarrow$ (1): Die Voraussetzung bedeutet gerade, daß P eine Bandmatrix ist.Da P irreduzibel ist, existiert außerdem ein n_0 mit $P_{01}^{(n_0)} > 0$. Mit obigem Lemma reicht es, die Behauptung für die P_n-homogene Markov-Kette $Q := P^{(n_0)}$ zu zeigen. Sei μ die Verteilung von Q. Dann ist $\mu_1 := \mu(\{1\}) > 0$ und damit folgt

$$\gamma - \hat{\mu}(x) = \hat{\mu}(\delta) - \hat{\mu}(x) = \sum_{k\neq 1} \mu(\{k\})(P_k(\delta) - P_k(x)) + \mu_1 a_0(\delta - x) \geqslant \mu_1 a_0(\delta - x).$$

Satz 1.4.2(i) liefert die Behauptung.
Erzeugt $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine polynomiale Hypergruppe, so gilt $|P_n(x)| \leqslant P_n(\delta)$ für alle $x \in \operatorname{Tr}\pi$ ([40], Corollary 2.8), und es bleibt (1) $\Rightarrow$ (1′) zu zeigen.
Sei X_n ein irreduzibler random walk mit Verteilung μ. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $c := \mu([0, k_0]) > 0$. Definiere das W-Maß $\mu^1 := \frac{1}{c}\sum_{k0}^{k_0} \mu(\{k\})\delta_k$. Dann ist $\mu = c\mu^1 + (1 - c)\mu^2$ und es gilt

$$\hat{\mu}(\delta) - \hat{\mu}(x) = c(\hat{\mu}^1(\delta) - \hat{\mu}^1(x)) + (1 - c)(\hat{\mu}^2(\delta) - \hat{\mu}^2(x)) \geqslant c(\hat{\mu}^1(\delta) - \hat{\mu}^1(x)).$$

Damit folgt die Behauptung wieder aus Satz 1.4.2(i).
Zu (ii):
(1) $\Rightarrow$ (2) und (3) $\Leftrightarrow$ (4) sind klar.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) folgt aus Satz 1.4.2(iii), da

$$\pi(P_1^{-1}(\gamma)) = \pi(\{x \in \operatorname{Tr}\pi : P_1(x) = P_1(\delta)\}) = \pi(\{\delta\}).$$

(3) $\Rightarrow$ (1) gilt, da $\delta \in \hat{\mu}^{-1}(\{\gamma\})$.
Die letzte Aussage folgt aus [34], Corollary zu Theorem 5. □

Bemerkung:
Erzeugt $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine polynomiale Hypergruppe, so verallgemeinert Teil (i) des Korollars [16], Theorem 3.2.2 auf den Fall $R > 1$.

Definition 1.4.7
X_n sei eine beliebige irreduzible Markov-Kette und $A \subseteq \mathbb{N}_0$. Dann heißt A *transient*, falls

$$P(X_n \in A \text{ unendlich oft } \mid X_0 = i) = 0$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und *rekurrent*, falls

$$P(X_n \in A \text{ unendlich oft } \mid X_0 = i) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Für einelementige Mengen stimmt diese Definition mit der Definition der 1-Transienz bzw. 1-Rekurrenz überein. Außerdem folgt unmittelbar aus der Definition:

(i) Ist X_n rekurrent, so ist jede nichtleere Menge rekurrent.

(ii) Ist X_n transient, so ist jede endliche Menge transient und jedes Komplement einer endlichen Menge rekurrent.

Im allgemeinen können jedoch Mengen existieren, die weder transient noch rekurrent sind.

Lemma 1.4.8
Es sei X_n die einfache Irrfahrt bzgl. eines beliebigen Polynomsystems. Dann ist jede beschränkte harmonische Funktion konstant.

Beweis: Ist f eine beschränkte harmonische Funktion, so genügt sie dem Gleichungssystem

$$f(0) = f(1) \text{ und } f(n) = a_n f(n+1) + b_n f(n) + c_n f(n-1) \text{ für } n \geqslant 2.$$

Damit folgt induktiv die Behauptung, da $a_n + b_n + c_n \equiv 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 1.4.9
Es sei X_n die einfache Irrfahrt wie im vorigen Lemma. Dann gilt:

(i) Jede Teilmenge ist entweder transient oder rekurrent.

(ii) Ist X_n transient, so ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ rekurrent genau dann, wenn sie unendlich ist.

Beweis:

(i) Dies folgt mit Lemma 1.4.8 aus [32], Proposition 3.8.

(ii) Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar.
Da $X_n \to \infty$ P-fast sicher und X_n sich nur in unmittelbaren Nachbarpunkten von X_{n-1} befinden kann, gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau_n < \infty \mid X_0 = i) = 1 \tag{1.5}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Dabei bezeichnet τ_n den ersten Zeitpunkt, zu dem sich die Markov-Kette im Zustand n befindet.
Sei also jetzt $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ mit $a_i < a_{i+1} \to \infty$ und T_k bezeichne den Zeitpunkt des k-ten Besuch von X_n in der Menge A.
Dann gilt

$$P(T_k < \infty \mid X_0 = i) = 1$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Dies ist für $k = 1$ klar wegen (1.5) und

$$P(T_1 < \infty \mid X_0 = i) \geqslant P(\tau_{a_j} < \infty \mid X_0 = i) = 1$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$. Für $k > 1$ folgt dies aus der starken Markov-Eigenschaft und der Darstellung

$$T_k = T_{k-1} + T_1 \circ \theta_{T_{k-1}}$$

mit dem Markov-Shift $X_n \circ \theta_{T_{k-1}} = X_{T_{k-1}+n}$.
Damit folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} P(X_n \in A \text{ unendlich oft } \mid X_0 = i) &= P(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{T_n < \infty\} \mid X_0 = i) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(T_n < \infty \mid X_0 = i) \\ &= 1 \end{aligned}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

□

Kapitel 2

Große Abweichungen

2.1 Große Abweichungen für Folgen nichtnegativer Zufallsvariablen

Unter dem (abstrakten) Prinzip der großen Abweichungen versteht man folgende Aussage:

Definition 2.1.1
Sei $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem polnischen Raum E und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge positiver Zahlen. Dann erfüllt $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ das *Prinzip der großen Abweichungen mit den Konstanten* $\{a_n\}$ *und der Ratenfunktion* $I : E \to [0, \infty[$, falls gilt:

(i) I ist halbstetig von unten und hat kompakte Niveau-Mengen, d.h. für jedes $m \geqslant 0$ ist $\{x : I(x) \leqslant m\}$ kompakt.

(ii) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq E$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log F_n(A) \leqslant -\inf_{x\in A} I(x).$$

(iii) Für jede offene Teilmenge $O \subseteq E$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log F_n(O) \geqslant -\inf_{x\in O} I(x).$$

Dabei bezeichnet hier und im folgenden log den natürlichen Logarithmus.

Bemerkung:
Im Weiteren ist F_n stets die Verteilung von X_n/a_n für eine Folge von Zufallsvariablen X_n. Hat F_n diese spezielle Form, so heißt das Prinzip der großen Abweichungen für F_n in [12] Prinzip der großen Abweichungen der ersten Stufe.

In den folgenden Abschnitten werden ausschließlich Zufallsvariablen mit nichtnegativen Werten betrachtet. Für solche Zufallsvariablen beweisen wir in Satz 2.1.5 eine Variante eines Satzes von Ellis (Satz II.6.1 in [12]), deren Voraussetzungen genau dem Fall nichtnegativer Zufallsvariablen angepaßt sind. Dabei spielen einige Eigenschaften konvexer Funktionen eine entscheidende Rolle. Diese sind in Anhang A.3 zusammengestellt.

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zufallsvariablen auf W-Räumen $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ mit Werten in $[0, \infty[$. Weiter sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine divergente Folge positiver Zahlen. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$

$$c_n(t) := \frac{1}{a_n} \log \mathbb{E}_n(\exp(tX_n)),$$

wobei $\mathbb{E}_n$ den Erwartungswert bzgl. $\mathbb{P}_n$ bezeichnet.

Es gelte

(a) $c_n(t) < \infty$ für alle $t \geqslant 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es gibt ein $t_0 \leqslant 0$, so daß gilt:
$c(t) := \lim_{n\to\infty} c_n(t)$ existiert für alle $t \geqslant t_0$, ist endlich und $c'_+(t_0) = 0$.
Im folgenden sei immer das größte solche t_0 gewählt.

Bemerkung:
Die Funktion $c(t)$ ist konvex auf $[t_o, \infty[$ (siehe das folgende Lemma). Daher existiert $c'_+(t_0) \in \bar{\mathbb{R}}$.

Lemma 2.1.2
Unter den Voraussetzungen (a) und (b) gelten

(i) $c_n(t)$ *ist endlich für alle* $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $c_n(t)$ *ist konvex auf* $\mathbb{R}$.
$c(t)$ *ist konvex und halbstetig von unten auf* $[t_0, \infty[$.

Beweis:

(i) Für $t \geqslant 0$ ist $\exp(tX_n) \geqslant 1$ $\mathbb{P}_n$-fast sicher und für $t < 0$ ist $\exp(tX_n) \leqslant 1$ $\mathbb{P}_n$-fast sicher. Somit ist $0 \leqslant c_n(t) < \infty$ für $t \geqslant 0$ und $c_n(t) \leqslant 0$ für $t \leqslant 0$. Mit der Jensenschen Ungleichung folgt weiter $\frac{1}{a_n} \mathbb{E}_n(X_n) \leqslant c_n(1) < \infty$. Also gilt nochmals mit der Jensenschen Ungleichung $-\infty < \frac{t}{a_n} \mathbb{E}_n(X_n) < c_n(t)$ für $t < 0$.

(ii) Die Hölder-Ungleichung liefert die Konvexität von $c_n(t)$. $c(t)$ ist punktweiser Limes konvexer Funktionen und daher ebenfalls konvex.
Es bleibt zu zeigen, daß $\liminf_{n\to\infty} c(x_n) \geqslant c(t_0)$ für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [t_0, \infty[$ mit $x_n \to t_0$. Da $c(t)$ konvex ist, folgt aber aus $c'_+(t_0) = 0$, daß $c(t) \geqslant c(t_0)$ für alle $t \geqslant t_0$ (A.3.4) und damit die Behauptung.

□

Lemma 2.1.3
Die Funktion

$$\tilde{c}(t) := \begin{cases} c(t_0) & , t \leqslant t_0 \\ c(t) & , t \geqslant t_0 \end{cases}$$

ist stetig und konvex auf $\mathbb{R}$.

Beweis: $c(t)$ ist konvex auf $[t_0, \infty[$ und $\lim_{t \downarrow t_0} c(t) = c(t_0)$ (Satz A.3.2). Also ist $\tilde{c}(t)$ stetig auf $\mathbb{R}$. Außerdem ist $c(t)$ monoton wachsend für $t \geqslant t_0$ (Satz A.3.4). Damit folgt die Konvexität von $\tilde{c}(t)$. □

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne

$$I(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \{tx - \tilde{c}(t)\}$$

die Legendre-Transformierte von $\tilde{c}(t)$.

Lemma 2.1.4

(i) $I(x)$ *ist konvex, von unten halbstetig und besitzt kompakte Niveau-Mengen.*

(ii) Es gilt $\inf_{x \in \mathbb{R}} I(x) = 0$ *und es ist* $I(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x \in [\tilde{c}'_-(0), c'_+(0)]$.

(iii)

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ \sup_{t \geqslant t_0} \{tx - c(t)\} & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{dom} I \subseteq [0, \infty[$.

(iv) Für $x > c'_+(0)$ *gilt*

$$I(x) = \sup_{t \geqslant 0} \{tx - c(t)\} = \inf_{y \geqslant x} I(y).$$

Falls $0 \leqslant x < c'_-(0)$ *existiert, so gilt dafür*

$$I(x) = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant 0} \{tx - c(t)\} = \inf_{0 \leqslant y \leqslant x} I(y).$$

Beweis:
Zu (i): Mit Satz A.3.6(i) ist nur zu zeigen, daß alle Niveau-Mengen kompakt sind. Betrachte dazu eine Niveau-Menge $K_b = \{z : I(z) \leqslant b\}$ mit $b \geqslant 0$. K_b ist abgeschlossen, weil I halbstetig von unten ist. Ist $z \in K_b$, so gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$tz \leqslant \tilde{c}(t) + I(z) \leqslant \tilde{c}(t) + b$$

(SatzA.3.6(ii)). Mit der Stetigkeit von $\tilde{c}(t)$ existiert ein $A > 0$ mit $\sup_{|t| \leqslant 1} \tilde{c}(t) \leqslant A \leqslant \infty$.
Folglich ist

$$|z| = \sup_{|t| \leqslant 1} tz \leqslant \sup_{|t| \leqslant 1} \tilde{c}(t) + b \leqslant A + b,$$

d.h. K_b ist beschränkt.
Zu (ii): Wegen (i) nimmt $I(x)$ sein Infimum in mindestens einem Punkt z_0 an. Nach der Definition des Subdifferentials (siehe A.3.3) ist dies äquivalent zu $0 \in \partial I(z_0)$. Dies wiederum ist äquivalent zu $z_0 \in \partial\tilde{c}(0) = [\tilde{c}'_-(0), c'_+(0)]$ (Satz A.3.4 und Satz A.3.6(iv)). Für alle $x \in \partial\tilde{c}(0)$ ist aber $I(x) = 0$, da $\tilde{c}(0) = c(0) = 0$ (Satz A.3.6).
Zu (iii): Für $x < 0$ ist

$$I(x) \geqslant \sup_{t \leqslant t_0}\{tx - \tilde{c}(t)\} = \sup_{t \leqslant t_0}\{tx\} - \tilde{c}(t_0) = +\infty,$$

denn $\tilde{c}(t)$ ist konstant für $t \leqslant t_0 \leqslant 0$. Für $x \geqslant 0$ und $t \leqslant t_0$ gilt

$$tx - \tilde{c}(t) = tx - \tilde{c}(t_0) \leqslant t_0 x - \tilde{c}(t_0)$$

und damit

$$I(x) = \sup_{t \geqslant t_0}\{tx - c(t)\}$$

Zu (iv): Dies gilt trivialerweise, falls $t_0 = 0$. Sei also $t_0 < 0$. Da $\tilde{c}(t)$ konvex ist, gilt $\tilde{c}'_-(0) \geqslant \tilde{c}(t)/t$ für $t < 0$. Somit erhält man, falls $t_0 \leqslant t < 0$ und $x > c'_+(0)$

$$tx - \tilde{c}(t) = t\,(x - c(t)/t) \leqslant t\left(x - c'_-(0)\right) < 0 = 0x - c(0).$$

Das Supremum in der Definition von $I(x)$ wird also nicht für $t < 0$ angenommen. Sei jetzt $0 \leqslant x < c'_-(0)$ und $t > 0$. Dann ist $c'_+(0) \leqslant c(t)/t$ und wie oben zeigt man, daß $tx - c(t) < 0$. Das Supremum wird also nicht für $t > 0$ angenommen. Wegen (i) und (ii) ist $I(x)$ monoton wachsend für $x > c'_+(0)$ und monoton fallend für $x < c'_-(0)$. Damit folgen die restlichen Behauptungen. $\square$

Satz 2.1.5 (Ellis)
Bezeichne Q_n die Verteilung von X_n/a_n. Dann gilt unter den Voraussetzungen (a) und (b):

(i) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n(A) \leqslant -\inf_{x\in A} I(x).$$

(ii) Ist zusätzlich $c(t)$ für $t > t_0$ differenzierbar, so gilt für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n(O) \geqslant -\inf_{x\in O} I(x).$$

Insbesondere erfüllt dann die Folge $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ das Prinzip der großen Abweichungen mit der konvexen Ratenfunktion $I(x)$.

Dabei wird $\log 0 := -\infty$ gesetzt.

Beweis:

(i) Betrachte zunächst $A_x := [x, \infty[$ mit $x > c'_+(0)$. Dann ist für jedes $t \geqslant 0$ und $y \in \mathbb{R}$
$$\mathbf{1}_A(y) \leqslant e^{a_n t(y-x)}$$
und daher
$$\begin{aligned} Q_n(A_x) &\leqslant e^{-a_n tx} \int_0^\infty e^{a_n ty}\, dQ_n(y) = e^{-a_n tx}\, E_n(\exp tX_n) \\ &= \exp(-a_n(tx - c_n(t))). \end{aligned}$$
Da $t \geqslant 0$ beliebig war, folgt mit Lemma 2.1.4(iv)
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n(A_x) \leqslant \inf_{t\geqslant 0}\{-(tx - c(t))\} = -\sup_{t\geqslant 0}\{tx - c(t)\} = -\inf_{y\geqslant x} I(y),$$
also die Behauptung.
Ist $c'_-(0) > 0$, so zeigt ein analoger Beweis die Behauptung für $A_x := [0, x]$ mit $x < c'_-(0)$.
Sei jetzt $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, aber sonst beliebig. Es genügt offensichtlich, die Behauptung für $A \subseteq [0, \infty[$ zu zeigen.
Ist $A \cap [c'_-(0), c'_+(0)] \neq \emptyset$, so ist $\inf_{x\in A} I(x) = 0$ (Lemma 2.1.4(ii)), und die Abschätzung ist richtig.
Ist $A \cap [c'_-(0), c'_+(0)] = \emptyset$, so existieren $x_1 < c'_-(0)$ und $x_2 > c'_+(0)$ mit $A \subseteq [0, x_1] \cup [x_2, \infty[$. Aufgrund der Monotonieeigenschaften von $I(x)$ gilt dann
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n(A) \leqslant -\min\{I(x_1),\, I(x_2)\} = -\inf_{x\in A} I(x)$$

(ii) Ist $O \cap \mathrm{dom} I = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen.
Ist $O \cap \mathrm{dom} I \neq \emptyset$, so ist auch $O \cap (\mathrm{dom} I)^\circ \neq \emptyset$ (da $\mathrm{dom} I$ ein Intervall ist), und mit Satz A.3.2 folgt
$$\inf_{x\in O} I(x) = \inf_{x\in O\cap(\mathrm{dom} I)^\circ} I(x)$$
Es reicht also zu zeigen, daß für jedes $x \in O \cap (\mathrm{dom} I)^\circ$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n(O) \geqslant -I(x)$$
ist.
Sei also $x \in O \cap (\mathrm{dom} I)^\circ$. Dann ist $x > 0$ und es existiert ein $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $x = \tilde{c}'(t_1)$ (Satz A.3.6(v)). Da $x > 0$ ist, ist $t_1 > t_0$ und somit $x = c'(t_1)$.
Definiere jetzt Maße $Q_n^{t_1} \ll Q_n$ mit den Dichten
$$\left(\int_0^\infty e^{a_n t_1 x}\, dQ_n(x)\right)^{-1} e^{a_n t_1 x}$$

Dann erfüllt die Folge $\{Q_n^{t_1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen von [29],Theorem 1 und konvergiert folglich schwach gegen δ_x.
Zu x gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) :=]x-\epsilon, x+\epsilon[\subseteq O$ und es gilt

$$Q_n(O) \geqslant Q_n(B_\epsilon(x)) = \exp(a_n c_n(t_1)) \int_{B_\epsilon(x)} e^{-a_n t_1 y}\, dQ_n^{t_1}(x).$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \tfrac{1}{a_n} \log Q_n(O) &\geqslant c(t_1) - t_1 x - t_1\epsilon + \liminf_{n\to\infty} \tfrac{1}{a_n} \log Q_n^{t_1}(B_\epsilon(x)) \\ &= -I(x) - t_1\epsilon + \liminf_{n\to\infty} \tfrac{1}{a_n} \log Q_n^{t_1}(B_\epsilon(x)),\end{aligned}$$

denn $I(x) = t_1 x - c(t_1)$ (Satz A.3.6(iii)). Damit ist der Beweis beendet, da $Q_n^{t_1}(B_\epsilon(x)) \to 1$ und $\epsilon > 0$ beliebig war.

□

Bemerkungen:

(i) Im Unterschied zum Satz von Ellis genügt es bei nichtnegativen Zufallsvariablen also, die Existenz und Differenzierbarkeit von $c(t)$ für $t \geqslant t_0$ zu fordern.

(ii) Ist $c(t)$ differenzierbar für $t \geqslant t_0$, so gilt das Prinzip der großen Abweichungen, und mit [10], Theorem 2.2.21, folgt die Existenz von $c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist dann $c(t) = \tilde{c}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn $c(t)$ ist auf $]-\infty, t_0]$ konvex, wegen Satz A.3.4 monoton fallend und beschränkt. Also muß $c(t)$ dort konstant sein.

2.2 Große Abweichungen für P_n–homogene Markov-Ketten

Satz 2.1.5 wird nun verwendet, um in Satz 2.2.4 unter bestimmten Voraussetzungen an das Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ das Prinzip der großen Abweichungen für P_n–homogene Markov-Ketten herzuleiten. Dazu ist es entscheidend, die Exponentialfunktion geeignet durch die „multiplikativen Funktionen“$P_n(x)$ zu ersetzen. Bedingungen, unter denen dies möglich ist, formulieren die folgenden Lemmata.

Lemma 2.2.1
Gegeben seien Folgen $a_n > 0, b_n \geqslant 0$ und $c_n > 0$ mit $a_n + b_n + c_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, für die $\alpha := \lim_{n\to\infty} a_n \in]0,1[$, $\beta := \lim_{n\to\infty} b_n$, und $\gamma := \lim_{n\to\infty} c_n \in]0,1[$ existieren mit $\alpha \geqslant \gamma$. $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichne das gemäß A.1 definierte orthogonale Polynomsystem. Ist $\alpha > \gamma$, so sei zusätzlich $P_n(1) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt.

Dann gibt es zu jedem $t \geqslant -\theta_0$ eine monoton fallende Folge $\alpha_t(n)$ und eine monoton wachsende Folge $\beta_t(n)$ positiver Zahlen mit

$$\alpha_t(n)e^{nt} \leqslant P_n(\cosh(t+\theta_0)) \leqslant \beta_t(n)e^{nt}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \alpha_t(n) = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \beta_t(n).$$

Beweis: Mit Lemma A.1.1 ist $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in der Nevai-Klasse $M(0,1)$ enthalten und $P_n(\cosh(t+\theta_0)) > 0$ für $t > 0$. Im Folgenden bezeichnen $p_n(x) = \sqrt{\pi_n}P_n(x)$ die orthonormalen Polynome.
Für alle $z \in \mathbb{C}\backslash] - \infty, x_0]$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n'(z)}{np_n(z)} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$

([30], Lemma 4.1.15). Also ist für $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n'(\cosh(t+\theta_0))\sinh(t+\theta_0)}{nP_n(\cosh(t+\theta_0))} = 1.$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(\cosh(t+\theta_0)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \frac{P_n'(\cosh(s+\theta_0))\sinh(s+\theta_0)}{nP_n(\cosh(s+\theta_0))} ds = t \tag{2.1}$$

für $t > 0$.
Setze jetzt für $t \geqslant 0$

$$\gamma_t(n) := P_n(\cosh(t+\theta_0))e^{-nt}.$$

Dann ist $\gamma_t(n) > 0$ und wegen (2.1) ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \gamma_t(n) = 0. \tag{2.2}$$

Damit gilt auch für $\alpha_t(n) := \min_{1\leqslant k\leqslant n} \gamma_t(k)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \alpha_t(n) = 0 \tag{2.3}$$

für $t > 0$, denn $\alpha_t(n)$ ist nichtnegativ und fällt monoton. Also existiert $\alpha_t := \lim_{n\to\infty} \alpha_t(n) \geqslant 0$ und (2.3) ist klar, falls $\alpha_t > 0$.
Ist $\alpha_t = 0$, so existiert eine streng monoton fallende Teilfolge $\gamma_t(n_k)$ mit $n_k \to \infty$ und für $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ ist

$$\frac{1}{n_{k+1}} \log \gamma_t(n_{k+1}) \leqslant \frac{1}{n} \log \alpha_t(n) \leqslant \frac{1}{n_k} \log \gamma_t(n_k).$$

Also folgt (2.3) aus (2.2).
Setze weiter $\beta_t(n) := \max_{1\leqslant k\leqslant n}\gamma_t(k)$. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\beta_t(n) = 0 \tag{2.4}$$

für jedes $t>0$, denn mit [30], Theorem 4.1.13 ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_t(n+1)}{\gamma_t(n)} &= e^{-t}\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}(\cosh(t+\theta_0))}{P_n(\cosh(t+\theta_0))} = e^{-t}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{c_{n+1}}{a_n}}\frac{p_{n+1}(\cosh(t+\theta_0))}{p_n(\cosh(t+\theta_0))}\\ &= e^{-t}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}e^{t+\theta_0} = 1.\end{aligned}$$

Ist also $\varepsilon>0$, so gibt es ein $\delta>0$ mit $\log(1+\delta)\leqslant\varepsilon$. Zu diesem δ wiederum existiert ein n_0 mit

$$-\varepsilon < \frac{1}{n}\log\gamma_t(n) \quad \text{und} \quad \gamma_t(n+1)\leqslant(1+\delta)\gamma_t(n)\leqslant(1+\delta)^{n-n_0}\beta_t(n_0)$$

für alle $n>n_0$. Damit ist für $n>n_0$

$$-\varepsilon < \frac{1}{n}\log\gamma_t(n)\leqslant\frac{1}{n}\log\beta_t(n)\leqslant\frac{n-n_0}{n}\log(1+\delta)+\frac{1}{n}\log\beta_t(n_0)\leqslant\varepsilon+\frac{1}{n}\log\beta_t(n_0).$$

Damit ist die Behauptung des Lemmas für $t>0$ gezeigt. Da sie für $t=0$ offensichtlich richtig ist, bleibt noch der Fall $-\theta_0\leqslant t<0$ zu betrachten, falls $\alpha>\gamma$.
Definiere dazu nun orthogonale Polynome $Q_n(x)$ durch

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(1)}. \tag{2.5}$$

Die 3-Term-Rekursionskoeffizienten von $Q_n(x)$ sind gegeben durch

$$\tilde{a}_n = a_n\frac{P_{n+1}(1)}{P_n(1)P_1(1)}, \tilde{b}_n = b_n\frac{1}{P_1(1)} \text{ und } \tilde{c}_n = c_n\frac{P_{n-1}(1)}{P_n(1)P_1(1)}.$$

Wie im Beweis von [42], 2.12 zeigt man, daß $\tilde{a}_n\to\tilde{\alpha}, \tilde{b}_n\to\tilde{\beta}$ und $\tilde{c}_n\to\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\alpha}=\tilde{\gamma}$.
Aus (2.5) folgt

$$P_n(\cosh(t+\theta_0)) = \frac{Q_n(\cosh(t+\theta_0))}{Q_n(\cosh\theta_0)}$$

und mit dem bereits bewiesenen ist dann

$$\frac{\tilde{\alpha}_{t+\theta_0}(n)}{\tilde{\beta}_{\theta_0}(n)}e^{nt}\leqslant P_n(\cosh(t+\theta_0))\leqslant\frac{\tilde{\beta}_{t+\theta_0}(n)}{\tilde{\alpha}_{\theta_0}(n)}e^{nt}.$$

□

Die Aussage von Lemma 2.2.1 kann verschärft werden, falls das orthogonale Polynomsystem zusätzlich die Eigenschaft (T) besitzt. Beachte, daß dies unter den Voraussetzungen von Lemma 2.2.1 insbesondere für jede polynomiale Hypergruppe gilt ([28], Corollary 2).

Lemma 2.2.2
Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.2.1 besitze das Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Eigenschaft (T). Dann gilt:

(i) Für $t \geqslant 0$ ist
$$\gamma_n e^{nt} \leqslant P_n(\cosh(t+\theta_0)) \leqslant e^{nt}.$$
Dabei ist $0 < \gamma_n \leqslant 1/2$ monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\gamma_n = 0$.
Gilt zusätzlich $\pi_n \leqslant M < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so existiert eine Konstante $0 < \rho \leqslant 1/2$ mit
$$\rho e^{nt} \leqslant P_n(\cosh t) \leqslant e^{nt}.$$

(ii) Ist $\alpha > \gamma$, so ist für $-\theta_0 \leqslant t < 0$
$$e^{nt} \leqslant P_n(\cosh(t+\theta_0)) \leqslant \delta_n e^{nt}.$$
Dabei ist $\delta_n \geqslant 2$ monoton wachsend mit $\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\log\delta_n = 0$.

Beweis: Besitzt $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Eigenschaft (T), so ist
$$\sum_{k=0}^{n} h(n,k)\cosh k\theta_0 = 1,$$
da $P_n(\cosh\theta_0) = 1$ ist für alle n.

(i) Für $t \geqslant 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ ist
$$1/2 e^{k(t+\theta_0)} \leqslant \cosh k(t+\theta_0) \leqslant \cosh k\theta_0 e^{kt}.$$
Damit folgt
$$P_n(\cosh(t+\theta_0)) = \sum_{k=0}^{n} h(n,k)\cosh k(t+\theta_0) \leqslant \sum_{k=0}^{n} h(n,k)\cosh k\theta_0 e^{kt} \leqslant e^{nt}$$
und
$$P_n(\cosh(t+\theta_0)) \geqslant 1/2\sum_{k=0}^{n} h(n,k)e^{k(t+\theta_0)} \geqslant 1/2 h(n,n)\left(\sqrt{\alpha/\gamma}\right)^n e^{nt}.$$
Bezeichnet σ_n den Leitkoeffizient von $P_n(x)$, so ist
$$h(n,n) = \frac{\sigma_n}{2^{n-1}} = \frac{2(\sqrt{\alpha\gamma})^n}{\prod_{k=1}^{n-1} a_k}$$
und
$$1/2 h(n,n)\left(\sqrt{\alpha/\gamma}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\prod_{k=1}^{n-1} a_k}.$$

Ist diese Folge nicht monoton fallend, so setze

$$\gamma_n = \frac{\alpha^n}{\prod_{k=1}^{n-1} \rho_k}$$

mit $\rho_k := \sup_{n \geqslant k} a_n$.
Dann hat γ_n die gewünschten Eigenschaften, da $\rho_k \to \alpha$.
Ist nun $\pi_n \leqslant M < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\alpha = \gamma$ und $\theta_0 = 0$. Denn sonst gäbe es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{a_n}{c_n} \geqslant \frac{\alpha}{\gamma} - \varepsilon > 1$$

und damit wäre

$$\pi_n \geqslant \pi_{n_0} (\alpha/\gamma - \varepsilon)^{n-n_0}$$

für $n \geqslant n_0$ im Widerspruch zur Beschränktheit der Folge $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Bezeichnen $p_n(x)$ die zugehörigen orthonormalen Polynome, so gilt für $t \geqslant 0$

$$\frac{p_n(\cosh t)}{e^{nt}} = \sqrt{\pi_n} \frac{P_n(\cosh t)}{e^{nt}} \leq \sqrt{M}.$$

Also genügt das Orthogonalisierungsmaß von $P_n(x)$ der Szegö-Bedingung auf $[-1, 1]$ (vgl. [29], S. 247). Es bezeichne λ_n den Leitkoeffizient von $p_n(x)$.
Dann gilt

$$h(n, n) = \frac{\sigma_n}{2^{n-1}} = \frac{\lambda_n}{2^{n-1}\sqrt{\pi_n}} \geqslant \frac{\lambda_n}{2^{n-1}\sqrt{M}}.$$

Da $\lambda_n / 2^n$ gegen eine positiven Wert konvergiert ([29], Theorem 3.5), ist $h(n, n)$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt.

(ii) Für $-\theta_0 \leqslant t < 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\cosh k(t + \theta_0) \geqslant \cosh k\theta_0 e^{kt}$ und damit $P_n(\cosh(t + \theta_0)) \geqslant e^{nt}$. Definiere nun wieder orthogonale Polynome $Q_n(x)$ durch

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(1)}.$$

Dabei stellt die Eigenschaft (T) sicher, daß $P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} h(n, k) > 0$. Wie in Lemma 2.2.1 ist mit Teil (i)

$$P_n(\cosh(t + \theta_0)) = \frac{Q_n(\cosh(t + \theta_0))}{Q_n(\cosh \theta_0)} \leqslant \tilde{\gamma}_n^{-1} e^{-n\theta_0} e^{n(t+\theta_0)} \leqslant \tilde{\gamma}_n^{-1} e^{nt}.$$

Mit $\delta_n := \tilde{\gamma}_n^{-1}$ folgt die Behauptung.

□

Bemerkung:
Im Allgemeinen ist es nicht möglich, in Teil (i) γ_n durch eine strikt positive Konstante zu ersetzen. Ein Gegenbeispiel sind die Tschebyscheff-Polynome der zweiten Art. Diese haben die explizite Darstellung

$$P_n(\cos t) = P_n^{(1/2,1/2)}(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{(n+1)\sin t},$$

also ist

$$P_n(\cosh t) = \frac{\sinh(n+1)t}{(n+1)\sinh t} = e^{nt}\frac{1-e^{-2(n+1)t}}{(n+1)(1-e^{-2t})}.$$

Lemma 2.2.3
Falls

(i) ein $k \geqslant 1$ und $A_0, \ldots, A_{k-1}, B_0, \ldots, B_{k-1}, C_0, \ldots, C_{k-1}$ existieren mit $a_{nk+i} \to A_i$, $b_{nk+i} \to B_i$ und $c_{nk+i} \to C_i$ mit $n \to \infty$ und

(ii) das zugehörige Polynomsystem mit $a_0 := 2(A_0 \ldots A_{k-1})^{1/k}$ und $b_0 = 1 - a_0$ (vgl. A.1) die Eigenschaft (T) besitzt,

so gilt für $t \geqslant 0$

$$\gamma_n e^{nt} \leqslant P_n(\cosh t) \leqslant e^{nt}.$$

Dabei ist $0 < \gamma_n \leqslant 1/2$ monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \gamma_n = 0$.

Beweis:
Analog zum Beweis von Lemma 2.2.2 reicht es zu zeigen, daß $1/n \sum_{k=1}^{n-1} \log a_k \to 1/k \sum_{i=0}^{k-1} \log A_i$.
Setze dazu

$$m_n^{(l)} := \frac{1}{nk+l} \sum_{i=1}^{nk+l-1} \log a_i \quad l = 0, \ldots, k-1.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein N_0 mit $|\log a_{nk+l} - \log A_l| < \varepsilon$ für alle $n > N_0$ und $l = 0, \ldots, k-1$.
Damit gilt für $n > N_0$

$$\begin{aligned}\Big|m_n^{(l)} - 1/k \sum_{i=0}^{k-1} \log A_i\Big| &= \tfrac{1}{nk+l}\Big| \textstyle\sum_{i=1}^{N_0 k-1} \log a_i + \sum_{j=N_0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} (\log a_{jk+i} - \log A_i) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=0}^{l} (\log a_{nk+i} - \log A_i) + (1 - l/k - N_0) \sum_{i=0}^{l} \log A_i. \\ &\quad -(l/k - N_0) \textstyle\sum_{i=l+1}^{k-1} \log A_i\Big| \\ &\leqslant \tfrac{1}{nk+l} C + (1 - \tfrac{N_0 k}{nk+l})\varepsilon\end{aligned}$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_1 so, daß für alle $n > N_1$ und $l = 0, \ldots, k-1$

$$|m_n^{(l)} - 1/k \sum_{i=0}^{k-1} \log A_i| < \varepsilon.$$

□

Satz 2.2.4
Es sei $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Polynomsystem, das den Voraussetzungen von Lemma 2.2.1 oder 2.2.3 genügt. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine P_n-homogene Markov-Kette, deren Verteilung $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0)$ einen endlichen Träger besitzt und $X_0 = 0$.
Dann erfüllen die Verteilungen $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von X_n/n das Prinzip der großen Abweichungen mit den Konstanten $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und der konvexen Ratenfunktion

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & x \notin [0,\, k] \\ \sup_{t\geqslant -\theta_0}\{tx - \log\hat{\mu}(\cosh(t+\theta_0))\} & x \in [0,\, k] \end{cases}$$

Dabei ist k der rechte Randpunkt von $\operatorname{Tr}\mu$.
$I(x)$ besitzt genau ein Minimum in $x = E_*(X_1)$.

Beweis: Wir haben nur die Voraussetzungen von Satz 2.1.5 mit $t_0 = -\theta_0$ nachzuprüfen. Da der Fall $k = 0$ trivial ist, sei also $k > 0$.
Die Verteilung von X_n ist $\mu^{(n)}$ und Bedingung (a) ist erfüllt, da mit μ auch $\mu^{(n)}$ einen endlichen Träger besitzt.
Die zweite Bedingung zeigt man in der Situation von Lemma 2.2.1 so:
Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant j \leqslant nk$ ist

$$\alpha_t(nk)e^{jt} \leqslant P_j(\cosh(t+\theta_0)) \leqslant \beta_t(nk)e^{jt} \tag{2.6}$$

Damit folgt

(2.7)

$$\begin{aligned} c_n(t) + 1/n\log\beta_t(nk) &= 1/n\log\sum_{j=0}^{nk}\beta_t(nk)e^{jt}\mu^{(n)}(\{j\}) \\ &\geqslant 1/n\log\sum_{j=0}^{nk}P_j(\cosh(t+\theta_0))\mu^{(n)}(\{j\}) \\ &= \log\sum_{j=0}^{k}P_j(\cosh(t+\theta_0))\mu(\{j\}) = \log\hat{\mu}(\cosh(t+\theta_0)) \\ &\geqslant c_n(t) + 1/n\log\alpha_t(nk) \end{aligned}$$

(vgl. die Bemerkung nach Lemma 1.2.1), d.h.

$$-1/n\log\beta_t(nk) \leqslant c_n(t) - \log\hat{\mu}(\cosh(t+\theta_0)) \leqslant -1/n\log\alpha_t(nk).$$

Dies bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} c_n(t) = \log\hat{\mu}(\cosh(t+\theta_0))$$

für $t \geqslant -\theta_0$.
Also bleibt zu zeigen, daß $c'_+(-\theta_0) = 0$. Dies folgt aber aus

$$\frac{\partial}{\partial t}P_n(\cosh(t+\theta_0))|_{t=-\theta_0} = P'_n(\cosh(t+\theta_0))\sinh(t+\theta_0)|_{t=-\theta_0} = 0.$$

Mit der Definition von $E_*(X_1)$, Lemma 2.1.4 und Satz 2.1.5 folgt die Behauptung.
Die folgende Überlegung zeigt, daß dom$I \subseteq [0,\, k]$:
Es ist

$$c'(t) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^{k} \mu_j P_j'(\cosh(t+\theta_0)) \sinh(t+\theta_0)}{\sum_{j=0}^{k} \mu_j P_j(\cosh(t+\theta_0))} & t \geqslant -\theta_0 \\ 0 & t \leq -\theta_0. \end{cases}$$

Der Zähler ist (bis auf den Faktor $\sinh(t + \theta_0)$) ein Polynom vom Grad $k - 1$ in $\cosh(t + \theta_0)$ und der Nenner eines vom Grad k. Daher ist $\lim_{t\to\infty} c'(t) = k$. Da $c(t)$ konvex ist, wächst $c'(t)$ monoton und es folgt $\{c'(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq [0,\, k]$. Satz A.3.6(v) liefert das Gewünschte.
Erfüllt das zugrunde liegende Polynomsystem die Bedingung aus Lemma 2.2.3, so ist Gleichung (2.6) zu ersetzen durch

$$\gamma_{nk} e^{jt} \leqslant P_j(\cosh t) \leqslant e^{jt}$$

für $t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant j \leqslant nk$. Wie oben folgt

$$0 \leqslant c_n(t) - \log \hat{\mu}(\cosh t) \leqslant -1/n \log \gamma_{nk}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} c_n(t) = \log \hat{\mu}(\cosh t)$$

für $t \geqslant 0$. Damit ist alles gezeigt,da auch in diesem Fall

$$\frac{\partial}{\partial t} P_n(\cosh(t + \theta_0))|_{t=-\theta_0} = 0$$

ist. □

Bemerkungen:

(i) Für Tschebyscheff-Polynome zweiter Art wurde dieses Resultat mit einer anderen Beweismethode in [7] hergeleitet.

(ii) Betrachtet man $f(t) := \hat{\mu}(\cos(t + i\theta_0))$ als das Analogon der gewöhnlichen charakteristischen Funktion der Verteilung μ, so ist $c(t) = f(it)$ und $I(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{tx - f(it)\}$. Dies zeigt, daß das obige Resultat den Satz von Cramér für Summen unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen ([10], Theorem 1.2.6) verallgemeinert.

(iii) dom$I \subseteq [0,\, k]$ spiegelt die Tatsache wieder, daß in der Situation des Satzes $P(X_n/n \in [0,\, k]) = 1$ gilt.

(iv) Man kann diesen Satz interpretieren als Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit im schwachen Gesetz der großen Zahlen ([12], Theorem II.6.3):
X_n/n konvergiert in Wahrscheinlichkeit exponentiell schnell.

(v) Die Aussage des Satzes bleibt richtig, wenn man die Voraussetzung $X_0 = 0$ ersetzt durch: Die Anfangsverteilung ν von X_0 hat einen endlichen Träger. Denn ist etwa $\operatorname{Tr}\nu \subseteq [0, l]$, so hat man nur in (2.6) und (2.7) nk durch $nk + l$ zu ersetzen.

Für die einfache Irrfahrt kann man die Ratenfunktion explizit angeben.

Korollar 2.2.5
Gegeben seien Folgen reeller Zahlen a_n, b_n, c_n wie in A.1. X_n sei die einfache Irrfahrt, d.h. die Markov-Kette X_n mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = j|\ X_n = i) = \begin{cases} a_n & j = i+1 \\ b_n & j = i \\ c_n & j = i-1 \\ 1 & i = 0,\ j = 1 \\ 0 & |j-i| > 1, \end{cases}$$

und F_n sei die Verteilung von X_n/n.

(i) Genügen die Folgen a_n, b_n, c_n den Voraussetzungen von Lemma 2.2.1, so gilt für $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ das Prinzip der großen Abweichungen mit den Konstanten $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und der Ratenfunktion

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & x \notin [0,\ 1] \\ \log \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}+\beta} & x = 0 \\ \quad x \log \dfrac{\left(\beta x + \sqrt{4\alpha\gamma + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)x^2}\right)^2}{2\alpha\left(4\alpha\gamma(1-x) + \beta(\beta x + \sqrt{4\alpha\gamma + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)x^2})\right)} & 0 < x < 1 \\ +(1-x)\log \dfrac{(1-x)(\beta x + \sqrt{4\alpha\gamma + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)x^2})}{4\alpha\gamma(1-x) + \beta(\beta x + \sqrt{4\alpha\gamma + (\beta^2 - 4\alpha\gamma)x^2})} & \\ \log \frac{1}{\alpha} & x = 1. \end{cases}$$

(ii) Genügen die Folgen a_n, b_n, c_n jedoch den Voraussetzungen von Lemma 2.2.3, so gilt das Prinzip der großen Abweichungen mit den Konstanten $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$

und der Ratenfunktion

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & x \notin [0,\,1] \\ 0 & x = 0 \\ \qquad x \log \dfrac{\left(b_0 x + \sqrt{a_0^2 + (b_0^2 - a_0^2)x^2}\right)^2}{a_0\left(a_0^2(1-x) + b_0(b_0 x + \sqrt{a_0^2 + (b_0^2 a_0^2)x^2})\right)} & \\ +(1-x)\log \dfrac{(1-x)(b_0 x + \sqrt{a_0^2 + (b_0^2 - a_0^2)x^2})}{a_0^2(1-x) + b_0(b_0 x + \sqrt{a_0^2 + (b_0^2 - a_0^2)x^2})} & 0 < x < 1 \\ \log \frac{2}{a_0} & x = 1. \end{cases}$$

(a_0, b_0 wie in Lemma 2.2.3).

Beweis: Wir haben nur die Gestalt der Ratenfunktion für $0 \leqslant x \leqslant 1$ nachzurechnen.

(i) Es ist

$$c'(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t+\theta_0)}{\cosh(t+\theta_0)+c/2} & t \geqslant -\theta_0 \\ 0 & t \leq -\theta_0 \end{cases}$$

mit $c := \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$.
Für $0 < x < 1$ hat die Gleichung $c'(t) = x$ die eindeutige Lösung

$$t(x) = \log \frac{\sqrt{\gamma}(cx + \sqrt{4(1-x^2) + c^2x^2})}{2\sqrt{\alpha}(1-x)}.$$

Satz A.3.6 liefert $I(x) = xt(x) - \log(2\sqrt{\alpha\gamma}\cosh(t(x)+\theta_0)+\beta)$ und Einsetzen ergibt die Gestalt von $I(x)$ für $0 < x < 1$.
Die Werte von $I(0)$ und $I(1)$ erhält man aus den Formeln $I(0) = \lim_{x\downarrow 0} I(x)$ und $I(1) = \lim_{x\uparrow 1} I(x)$ (Satz A.3.2).

(ii) In diesem Fall ist

$$c'(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)+c} & t \geqslant -\theta_0 \\ 0 & t \leq -\theta_0 \end{cases}$$

mit $c = \frac{b_0}{a_0}$. Daraus erhält man nach ähnlicher Rechnung die Gestalt von $I(x)$.

□

Ist $(\mathbb{N}_0, *)$ eine polynomiale Hypergruppen mit beschränktem Haarmaß und konvergenten Rekursionskoeffizienten, so läßt sich die Aussage von Satz 2.2.4 auf random walks erweitern, deren Verteilungen unbeschränkten Träger besitzen.
Für beliebige polynomiale Hypergruppen vergleiche auch Satz 2.3.8.

Die *Momentenerzeugungsfunktion* eines W-Maßes μ auf $\mathbb{R}$ ist definiert als

$$f_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\mu(x).$$

Lemma 2.2.6
Sei $(\mathbb{N}_0, *)$ *eine polynomiale Hypergruppe, die den Voraussetzungen von Lemma 2.2.2 bzw. 2.2.3 genügt. Ist* μ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathbb{N}_0$ *mit* $f_\mu(t_0) < \infty$ *für ein* $t_0 > \theta_0$*, so ist die Funktion*

$$M_\mu(t) = \begin{cases} [-\theta_0, t_0 - \theta_0] & \to \,]0, \infty[\\ t & \mapsto \hat{\mu}(\cosh(t+\theta_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{k\}) P_k(\cosh(t+\theta_0)) \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar und

$$E(m_n(X)) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \hat{\mu}(\cosh(t+\theta_0))|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n M_\mu(t)|_{t=0}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Es ist $f_\mu(t) < \infty$ für alle $t \leqslant t_0$.
Mit Lemma 2.2.2 bzw. 2.2.3 ist für $t \in [0,\, t_0]$

$$M_\mu(t) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{k\}) e^{kt} < \infty$$

und daher endlich.
Für $t \in [-\theta_0,\, 0[$ ist $\cosh(t+\theta_0) \in [1, x_0] \subseteq D_S$. Also ist $M_\mu(t)$ auch für $t \in [-\theta_0,\, 0[$ endlich.
Mit der Eigenschaft (T) und den Bezeichnungen aus A.2 ist für $t \geqslant -\theta_0$

$$\varphi_{n,t+\theta_0}(k) = \sum_{l=0}^{k} h(k,l)\, l^n\, 1/2 \left(e^{l(t+\theta_0)} + (-1)^n e^{-l(t+\theta_0)}\right).$$

Also ist mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} &1/t(\varphi_{n,t+\theta_0}(k) - m_n(k)) = \\ &= \sum_{l=0}^{k} h(k,l)\, l^n\, 1/2 \left(1/t \left(e^{l(t+\theta_0)} - e^{l\theta_0}\right) + (-1)^n 1/t \left(e^{-l(t+\theta_0)} - e^{-l\theta_0}\right)\right) \\ &\leqslant \sum_{l=0}^{k} h(k,l) l^n\, 1/t \left(e^{l(t+\theta_0)} - e^{l\theta_0}\right) \leqslant \sum_{l=0}^{k} h(k,l)\, l^n\, e^{l\xi} \leqslant k^n\, e^{k\xi} \end{aligned}$$

mit einem $\xi \in (\theta_0, t+\theta_0)$. Da die Momentenerzeugungsfunktion $f_\mu(t)$ auf $(0, t_0)$ endlich ist, ist sie dort analytisch mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n f_\mu(t) = \int_0^\infty x^n\, e^{tx}\, d\mu(x)$$

für $t \in (0, t_0)$([12], Lemma VII.5.3). Dies bedeutet, daß die Funktion $f(k) := k^n e^{kt}$ für jedes $t \in (0, t_0)$ und $n \geq 1$ μ-integrierbar ist und die Behauptung folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz. □

Bemerkung:
Das Lemma zeigt, daß für polynomiale Hypergruppen $M_\mu(t)$ das natürliche Analogon der Momentenerzeugungsfunktion ist.
Damit ist das folgende Korollar ein exaktes Gegenstück zum Satz von Cramér.

Korollar 2.2.7
Es sei $(\mathbb{N}_0, *)$ eine polynomiale Hypergruppe mit beschränktem Haarmaß und konvergenten Rekursionskoeffizienten. Es sei X_n ein random walk, dessen Verteilung μ $M_\mu(t) < \infty$ für alle $t \geqslant 0$ erfüllt, und $X_0 = 0$. Bezeichnet F_n die Verteilung von X_n/n, so erfüllt die Folge $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ das Prinzip der großen Abweichungen mit den Konstanten $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und der konvexen Ratenfunktion

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & \textit{falls } x < 0 \\ \sup_{t\geqslant 0}\{tx - \log M_\mu(t)\} & \textit{falls } x > 0. \end{cases}$$

Das eindeutige Minimum von $I(x)$ ist $x = 0$.

Beweis: Mit Lemma 2.2.2 existiert ein $0 < \rho \leqslant 1/2$ mit

$$\rho e^{nt} \leqslant P_n(\cosh t) \leqslant e^{nt}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \geqslant 0$. Wie im Beweis von Satz 2.2.4 folgt daraus

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \log M_\mu(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases}$$

und $f_\mu(t) \leqslant 1/\rho\hat{\mu}(\cosh t)$. Mit Lemma 2.2.6 folgt die Behauptung aus Satz 2.1.5. □

2.3 Große Abweichungen auf Sturm-Liouville-Hypergruppen

Gegeben sei eine Funktion A auf $\mathbb{R}_+$ mit den folgenden Eigenschaften:

(A_0) $A \in C(\mathbb{R}_+)$, $A(x) > 0$ für $x > 0$, und die Einschränkung von A auf $]0, \infty[$ ist stetig differenzierbar.

(A_1) Es gilt entweder

(A_{1a}) $A(0) = 0$ und in einer Umgebung von 0 ist

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{\alpha_0}{x} + \alpha_1(x)$$

mit $\alpha_0 > 0$ und einer ungeraden Funktion $\alpha_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ oder

(A_{1b}) $A(0) > 0$ und $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$.

(A_2) Es existiert eine Funktion $\beta \in C^1(\mathbb{R}_+)$ mit $\beta(0) \geqslant 0$ so, daß $\frac{A'(x)}{A(x)} - \beta(x) \geqslant 0$ ist und die Funktionen $\frac{A'(x)}{A(x)} - \beta(x)$ und $q := \frac{1}{2}\beta' - \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{A'(x)}{A(x)}\beta$ monoton fallend auf $]0, \infty[$ sind.

Definition 2.3.1
Eine Hypergruppe $(\mathbb{R}_+, *)$ heißt *Sturm-Liouville Hypergruppe (zur Funktion A)*, falls eine Funktion A auf $\mathbb{R}_+$ existiert, die (A_0) erfüllt, so, daß für jede reellwertige Funktion f auf $\mathbb{R}_+$, die Einschränkung einer geraden C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$ ist, gilt: Die Funktion $u_f(x, y) := f(x * y)$ ist zweimal differenzierbar und Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx} + \frac{A'(x)}{A(x)} u_x = u_{yy} + \frac{A'(y)}{A(y)} u_y$$

zur Anfangsbedingung

$$u_y(x, 0) = 0 \text{ für } x \in]0, \infty[.$$

Alle bekannten Beispiele von Hypergruppen auf $\mathbb{R}_+$ sind Sturm-Liouville-Hypergruppen. In [48],Theorem 3.11 wird gezeigt, daß zu jeder Funktion A, für die (A_0)–(A_2) gilt, eine Sturm-Liouville-Hypergruppe existiert. Die multiplikativen Funktionen einer solchen Sturm-Liouville Hypergruppe sind genau die Lösungen φ_λ der Differentialgleichung

$$f'' + \frac{A'(x)}{A(x)} f' + (\lambda^2 + \rho^2) f = 0$$
$$f(0) = 1 \text{ und } f'(0) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Dabei ist

$$\rho := \lim_{x\to\infty} \frac{A'(x)}{2A(x)}.$$

Beispiel:
Wähle $\alpha > -1/2$ und $A_\alpha(x) = x^{2\alpha+1}$. Die Sturm-Liouville-Hypergruppe zur Funktion $A_\alpha(x)$ heißt Bessel-Hypergruppe zum Parameter α. Für sie ist $\rho = 0$ und die multiplikativen Funktionen sind gegeben durch $\varphi_\lambda(x) = \Lambda_\alpha(\lambda x)$, wobei $\Lambda_\alpha(x)$ die durch $\Lambda_\alpha(0) = 1$ normierte Besselfunktion der ersten Art zum Parameter α ist.

Definition 2.3.2
Es sei $(\mathbb{R}_+, *)$ eine Sturm-Liouville-Hypergruppe. Für $\mu \in M^1(\mathbb{R}_+)$ heißt jede Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Zustandraum $\mathbb{R}_+$ und Übergangsfunktion

$$P(x; A) := \delta_x * \mu(A) \qquad (x \in \mathbb{R}_+; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$$

random walk mit der Verteilung μ.

Um ein Prinzip der großen Abweichungen für solche Markov-Ketten beweisen zu können, benötigen wir wie im vorigen Abschnitt das asymptotische Verhalten der multiplikativen Funktionen.

Lemma 2.3.3
Es sei $(\mathbb{R}_+, *)$ eine Sturm-Liouville Hypergruppe wie oben. Dann gilt für die multiplikativen Funktionen:

(i) Für jedes $\lambda > 0$ existiert eine stetige, monoton fallende Funktion $\gamma_{(\lambda+\rho)}(x)$ mit $0 < \gamma_{(\lambda+\rho)}(x) \leqslant 1$ für alle $x \geqslant 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \gamma_{(\lambda+\rho)}(nx_0) = 0$ für jedes $x_0 > 0$, so daß gilt

$$\gamma_{(\lambda+\rho)}(x)e^{\lambda x} \leqslant \varphi_{i(\lambda+\rho)}(x) \leqslant e^{\lambda x}.$$

Ist darüber hinaus $A \in C^2(]0, \infty[)$ beschränkt und $\frac{A'(x)}{2A(x)}$ von beschränkter Variation auf $[b, \infty[$ für ein $b > 0$, so kann $\gamma_\lambda(x)$ durch eine positive Konstante γ_λ ersetzt werden.

(ii) Ist $\rho > 0$, so gilt für $-\rho \leqslant \lambda < 0$

$$e^{\lambda x} \leqslant \varphi_{i(\lambda+\rho)}(x) \leqslant \delta_\rho(x)e^{\lambda x}$$

mit einer stetigen, monoton wachsenden Funktion $\delta_\rho(x) > 1$, die ebenfalls $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \delta_\rho(nx_0) = 0$ für alle $x_0 > 0$ erfüllt.

Beweis: Die multiplikativen Funktionen einer Sturm-Liouville Hypergruppe besitzen die Laplace-Darstellung

$$\varphi_\lambda(x) = \int_{-x}^{x} e^{-t(\rho+i\lambda)} dv_x(t) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}_+) \tag{2.8}$$

mit $v_x \in M^1[-x, x]$ (vgl. [46], Theorem 1.2).
Somit ist

$$\varphi_{i(\lambda+\rho)}(x) \leqslant e^{\lambda x} \qquad \text{für } \lambda \geqslant 0$$

und

$$\varphi_{i(\lambda+\rho)}(x) \geqslant e^{\lambda x} \qquad \text{für } -\rho \leqslant \lambda < 0.$$

Sei zunächst $\rho = 0$.
Setze $\gamma_\lambda(x) := \varphi_{i\lambda}(x)e^{-\lambda x}$ für $\lambda > 0$. Mit obigem und [48], Proposition 4.2 ist $0 < \gamma_\lambda(x) \leqslant 1$.
$\gamma_\lambda(x)$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$\gamma'_\lambda(x) = \gamma_\lambda(x)\left(\frac{\varphi'_{i\lambda}(x)}{\varphi_{i\lambda}(x)} - \lambda\right).$$

Dabei erfüllt $\psi_\lambda(x) := \frac{\varphi'_{i\lambda}(x)}{\varphi_{i\lambda}(x)}$ die Differentialgleichung

$$\psi'_\lambda + \psi_\lambda^2 + \frac{A'(x)}{A(x)}\psi = \lambda^2$$

und die Anfangsbedingung $\psi_\lambda(0) = 0$.
Wir zeigen nun, daß $\psi_\lambda(x) \leqslant \lambda$ auf $\mathbb{R}_+$ ist und daher $\gamma_\lambda(x)$ monoton fallend auf $\mathbb{R}_+$ ist.
Sei $\varepsilon > 0$.
Es gilt $\lim_{x\to\infty} \psi_\lambda(x) = \lambda$ ([46], Lemma 1.1). Also ist die Menge $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \psi_\lambda(x) = \lambda + \varepsilon\}$ kompakt, da sie abgeschlossen und beschränkt ist. Angenommen, es wäre $A_\varepsilon \neq \emptyset$. Dann ist $x_\varepsilon := \min_{x\geqslant 0}\{\psi_\lambda(x) = \lambda + \varepsilon\}$ strikt positiv und

$$\psi'_\lambda(x_\varepsilon) = \lambda^2 - (\lambda+\varepsilon)^2 - \frac{A'(x_\varepsilon)}{A(x_\varepsilon)}(\lambda+\varepsilon) < 0,$$

denn es ist $\frac{A'(x)}{A(x)} \geqslant 0$ für alle $x > 0$ ([48], Corollary 2.12).
Damit ist ψ_λ streng monoton fallend in einer Umgebung von x_ε, im Widerspruch zur Wahl von x_ε.
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\psi_\lambda(x) \leqslant \lambda$ auf $\mathbb{R}_+$.
Es bleibt zu zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\gamma_\lambda(nx_0) = 0$ für jedes $x_0 > 0$. Nun ist $\frac{1}{n}\log\gamma_\lambda(nx_0) = \frac{1}{n}\log\varphi_{i\lambda}(nx_0) - \lambda x_0$.
Sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben.
Mit [46], Lemma 1.1 existiert ein $x_\varepsilon > 0$ mit $|\frac{\varphi'_{i\lambda}(x)}{\varphi_{i\lambda}(x)} - \lambda| < \varepsilon$ für $x > x_\varepsilon$. Weiter gibt es ein $N(\varepsilon, x_0)$ mit $nx_0 \geqslant x_\varepsilon$ für $n > N(\varepsilon, x_0)$. Damit ist für $n > N(\varepsilon, x_0)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log\varphi_{i\lambda}(nx_0) &= \frac{1}{n}\log\varphi_{i\lambda}(x_\varepsilon) + \frac{1}{n}\int_{x_\varepsilon}^{nx_0}\frac{\varphi'_{i\lambda}(t)}{\varphi_{i\lambda(t)}}dt\\ &\leqslant (\lambda+\varepsilon)x_0 + \frac{1}{n}\left(\log\varphi_{i\lambda}(x_\varepsilon) - (\lambda+\varepsilon)x_\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Damit folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\gamma_\lambda(nx_0) \leqslant \varepsilon x_0$ und analog $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\gamma_\lambda(nx_0) \geqslant -\varepsilon x_0$ also die Behauptung.
Ist $A \in C^2(]0,\infty[)$ beschränkt und $\frac{A'(x)}{2A(x)}$ von beschränkter Variation auf $[b,\infty[$ für ein $b \geqslant 0$, so zeigt das nachfolgende Lemma, daß ein x_0 existiert mit

$$\gamma_\lambda(x) \geqslant \frac{c}{2\sqrt{\lambda M}} =: \gamma_\lambda > 0$$

für alle $x > x_0$, wobei $A(x) \leqslant M$. Da $\gamma_\lambda(x)$ monoton fällt, ist $\gamma_\lambda(x) \geqslant \gamma_\lambda$ für alle $x \geqslant 0$.
Sei nun $\rho > 0$.
Dann ist φ_0 ein positiver Charakter. Die mittels φ_0 modifizierte Hypergruppe (siehe [40]) ist eine Sturm-Liouville Hypergruppe zur Funktion $\tilde{A} := \varphi_0^2 \cdot A$ mit

$$\tilde{\rho} = \lim_{x\to\infty} \frac{\tilde{A}'(x)}{2\tilde{A}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} + \rho = 0$$

(vgl. [46], Lemma 1.1). Ihre multiplikativen Funktionen sind gegeben durch

$$\tilde{\varphi}_\lambda(x) = \frac{\varphi_\lambda(x)}{\varphi_0(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

d.h.

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\tilde{\varphi}_\lambda(x)}{\tilde{\varphi}_{i\rho}(x)} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Mit dem bereits bewiesenen erhält man für $\lambda \geqslant 0$:

$$\varphi_{i(\lambda+\rho)}(x) = \frac{\tilde{\varphi}_{i(\lambda+\rho)}(x)}{\tilde{\varphi}_{i\rho}(x)} \geqslant \tilde{\gamma}_{\lambda+\rho}(x) e^{\lambda x}$$

und für $-\rho \leqslant \lambda < 0$:

$$\varphi_{i(\lambda+\rho)}(x) \leqslant \tilde{\gamma}_\rho^{-1}(x) e^{\lambda x}.$$

$\square$

Lemma 2.3.4
Gegeben sei eine beschränkte Funktion $A \in C^2(]0,\infty[)$, die $(A_0), (A_1), (A_2)$ erfüllt. Weiter existiere ein $b > 0$ so, daß $\frac{A'(x)}{A(x)}$ auf $[b, \infty[$ von beschränkter Variation ist. Dann haben die Lösungen $f_\lambda(x)$ der Differentialgleichung

$$f'' + \frac{A'(x)}{A(x)} f' + \lambda^2 f = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

für $\lambda > 0$ das folgende asymptotische Verhalten

$$\lim_{x\to\infty} f_\lambda(x)\sqrt{A(x)} e^{-\lambda x} = \frac{c}{\sqrt{\lambda}}$$

mit einem $c > 0$.

Beweis: Die Funktion $g_\lambda(x) := \sqrt{A(x)} f_\lambda(x)$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$g_\lambda''(x) = \left(\lambda^2 + \left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)' + \left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)^2\right) g_\lambda(x).$$

Aufgrund der Voraussetzungen ist $h(x) := \left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)' + \left(\frac{A'(x)}{A(x)}\right)^2$ integrierbar auf $]b, \infty[$. Mit [31], Theorem 6.3.1 existiert ein Fundamentalsystem $w_1(x), w_2(x)$ obiger Differentialgleichung mit

$$\sqrt{\lambda} w_1(x) e^{\lambda x} \to 1 \qquad \sqrt{\lambda} w_2(x) e^{-\lambda x} \to 1 \qquad \text{für } x \to \infty.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung:
Für nicht beschränkte Funktionen $A(x)$ gilt im allgemeinen $\gamma_{\lambda+\rho}(x) \to 0$ mit $x \to \infty$. Betrachte beispielsweise die Bessel-Hypergruppen mit $\alpha > -1/2$. Für sie ist

$$\varphi_{i\lambda}(x) = \Lambda_\alpha(i\lambda x) = 2^\alpha (i\lambda x)^{-\alpha} \Gamma(\alpha+1) J_\alpha(i\lambda x) = 2^\alpha (\lambda x)^{-\alpha} \Gamma(\alpha+1) I_\alpha(\lambda x)$$

mit der modifizierten Bessel-Funktion 1.Art $I_\alpha(x)$. Die asymptotische Entwicklung von $I_\alpha(x)$ (siehe [13],7.13.1(5)) zeigt, daß $\varphi_{i\lambda}(x)$ für $x \to \infty$ das folgende asymptotische Verhalten besitzt:

$$\varphi_{i\lambda}(x) \approx \frac{2^\alpha}{\sqrt{2\pi}} (\lambda x)^{-\alpha+1/2} e^{\lambda x}.$$

Lemma 2.3.5
Es sei $(\mathbb{R}_+, *)$ eine Sturm-Liouville-Hypergruppe wie oben und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}_+$, für das $f_\mu(t_0) := \int_0^\infty e^{t_0 x} d\mu(x) < \infty$ für ein $t_0 > \rho$ gilt. Dann ist die Funktion $M_\mu(\lambda) := \hat{\mu}(i(\lambda+\rho))$ auf $(-\rho, t_0-\rho)$ strikt positiv und unendlich oft differenzierbar. Darüber hinaus ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E(m_n(X)) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \hat{\mu}(i(t+\rho))|_{t=0} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n M_\mu(t)|_{t=0}.$$

Beweis: Aus der Laplace-Darstellung (2.8) folgt

$$\phi_{n,i(\lambda+\rho)}(x) - m_n(x) = \int_{-x}^{x} t^n \left(e^{\lambda t} - 1\right) d\nu_x(t).$$

Damit zeigt man die Behauptung wie in Lemma 2.2.6. □

Satz 2.3.6
Sei $(\mathbb{R}_+, *)$ eine Sturm-Liouville-Hypergruppe wie oben und sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit kompaktem Träger.
Bezeichnet dann S_n einen random walk mit Verteilung μ, so erfüllt die Folge $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Verteilungen von S_n/n das Prinzip der großen Abweichungen mit Konstanten $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und der Ratenfunktion

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & x \notin [0,k] \\ \sup_{t \geqslant -\rho}\{tx - \log \hat{\mu}(i(t+\rho))\} & x \in [0,k] \end{cases}.$$

Dabei ist k der rechten Randpunkt von $\operatorname{Tr}\mu$ *und das einzige Minimum von* $I(x)$ *ist* $x = E_*(X_1)$.

Beweis: Der Beweis verläuft genau wie der Beweis für Satz 2.2.4. Man verwendet nur Lemma 2.3.3 statt Lemma 2.2.1.
$\operatorname{dom} I \subseteq [0, k]$ zeigt man hier so:
Für $t \geqslant 0$ ist $c(t) \leqslant \log f_\mu(t) \leqslant kt$ (Lemma 2.3.3). Damit ist

$$I(x) \geqslant \sup_{t \geqslant 0}\{tx - kt\} = +\infty$$

für $x > k$. □

Das folgende Korollar ist das Gegenstück zu Korollar 2.2.7.

Korollar 2.3.7
Es sei $A \in C^2(]0, \infty[)$ *eine beschränkte Funktion, die* (A_0)–(A_2) *erfüllt und für die ein* $b > 0$ *existiert so, daß* $\frac{A'(x)}{A(x)}$ *auf* $[b, \infty[$ *von beschränkter Variation ist.*
Sei $(\mathbb{R}_+, *)$ *die zugehörige Sturm-Liouville-Hypergruppe und* μ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathbb{R}_+$ *mit* $\hat{\mu}(it) < \infty$ *für alle* $t \geqslant 0$. *Bezeichnet dann* S_n *einen random walk mit Verteilung* μ, *so erfüllt die Folge* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *der Verteilungen von* S_n/n *das Prinzip der großen Abweichungen mit den Konstanten* $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und der Ratenfunktion*

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ \sup_{t\geqslant 0}\{tx - \log \hat{\mu}(it)\} & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Es gilt $I(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$.

Beweis: Dies folgt wie in Korollar 2.2.7 aus Lemma 2.3.3 und Lemma 2.3.5. Beachte dabei, daß $\rho = 0$ ist, falls $A(x)$ beschränkt ist ([48],(3.13)). □

Die Abschätzung nach oben für abgeschlossene Mengen im Prinzip der großen Abweichungen kann man allgemeiner beweisen.

Dazu sei $(K, *)$ eine nichtkompakte schwache Hypergruppe mit $K \subseteq \mathbb{R}_+$, die normalisiert ist, d.h. für alle $x, y \in K$ gilt

$$\operatorname{Tr}\delta_x * \delta_y \subseteq [|x - y|, x + y]. \tag{2.9}$$

Diese Bedingung ist für jede polynomiale Hypergruppe erfüllt und stellt für Hypergruppen auf $\mathbb{R}_+$ keine echte Einschränkung dar ([47],3.9).
Weiter nennen wir jede Markov-Kette X_n mit Zustandsraum K und der Übergangsfunktion

$$P(x; A) = \delta_x * \mu(A) \qquad (x \in K, A \in \mathcal{B}(K), \mu \in M^1(K))$$

random walk mit Verteilung μ.

Satz 2.3.8
Es sei $(K, *)$ eine nichtkompakte, normalisierte schwache Hypergruppe ($K \subseteq \mathbb{R}_+$), und μ ein W-Maß mit $f_\mu(t) := \int_0^\infty e^{tx} d\mu(x) < \infty$ für alle $t > 0$.
Es bezeichne X_n ein random walk mit Verteilung μ und $c_n(t) = \frac{1}{n} \log E(\exp(tX_n))$. Dann gilt

(i) *$c_n(t)$ ist endlich für alle $t \in \mathbb{R}$. $c(t) := \lim_{n\to\infty} c_n(t)$ existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist endlich.*

(ii) *Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq K$ gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log P(X_n/n \in A) \leqslant - \inf_{x\in A} I(x)$$

mit

$$I(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\{tx - c(t)\} & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_0^\infty e^{tx}\, d\mu^{(n+m)}(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(t(x * y))\, d\mu^{(m)}(x) d\mu^{(n)}(y), \tag{2.10}$$

wobei $\exp(t(x * y)) := \int e^{tz}\, d(\delta_x * \delta_y)(z)$.
Da K normalisiert ist, ist für $x, y \in K$ (siehe Gleichung (2.9))

$$\exp(t(x * y)) \leqslant \exp(t(x + y)) \qquad t \geqslant 0, \tag{2.11}$$

$$\exp(t(x * y)) \geqslant \exp(t(x + y)) \qquad t \leqslant 0. \tag{2.12}$$

Mit (2.10)–(2.12) und der Jensenschen Ungleichung folgt für $t < 0$

$$0 \geqslant c_n(t) \geqslant 1/n \log(f_\mu(t))^n = \log f_\mu(t) \geqslant t \int_0^\infty x\, d\mu(x) > -\infty$$

und genauso für $t \geqslant 0$

$$0 \leqslant c_n(t) \leqslant \log f_\mu(t) < +\infty.$$

Also ist $c_n(t)$ endlich für alle $t \in \mathbb{R}$.
Weiter zeigt (2.10)–(2.12), daß die Folge $f(n) = \log f_{\mu^{(n)}}(t)$ subadditiv ist für festes $t \geqslant 0$ und ebenso für festes $t \leqslant 0$ die Folge $g(n) = -\log f_{\mu^{(n)}}(t)$. Mit [10], Lemma 3.1.3 folgt, daß $c(t) := \lim_{n\to\infty} c_n(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert und endlich ist.
Schließlich ist c(t)$\leqslant$ 0 für $t \leqslant 0$, da dies für $c_n(t) \leqslant 0$ gilt. Daher ist für $x < 0$

$$I(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{tx - c(t)\} \geqslant \sup_{t<0}\{tx - c(t)\} = +\infty.$$

Die Behauptung folgt jetzt mit dem bereits Bewiesenen direkt aus dem Satz von Ellis ([12], Theorem II.6.1). □

Kapitel 3

Lokale Grenzwertsätze

In [41] werden zentrale Grenzwertsätze für random walks auf einer Klasse polynomialer Hypergruppen bewiesen. Diese Klasse enthält als prominentesten Vertreter die Jacobi-Polynome und darüber hinaus Polynomsysteme, deren Rekursionskoeffizienten das gleiche asymptotische Verhalten aufweisen.
Diese zentralen Grenzwertsätze werden hier unter zusätzlichen Bedingungen durch lokale Grenzwertsätze ergänzt. Diese wiederum benutzen wir in Abschnitt 3.3, um für die einfache Irrfahrt ein Analogon zum Integraltest von Dvoretzky-Erdös zu beweisen.
Ein Beispiel einer polynomialen Hypergruppe auf $\mathbb{N}_0^2$ bilden die sogenannten Scheibenpolynome, eine Familie orthogonaler Polynome auf der Einheitskreisscheibe. Auch für diese können wir den zentralen Grenzwertsatz aus [6] durch lokale Grenzwertsätze ergänzen.

3.1 Lokale Grenzwertsätze für eine Klasse polynomialer Hypergruppen

Im folgenden werden mehrfach folgende Identitäten verwendet (siehe [13], 7.7.3 (24) und (25)):

$$\int_0^\infty e^{-Ct^2}\Lambda_\alpha(Nt)t^{2\alpha+1}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2C^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{N^2}{4C}\right) \tag{3.1}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-Ct^2}\Lambda_\alpha(Mt)\Lambda_\alpha(Nt)t^{2\alpha+1}dt = \frac{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)^2}{(NM)^\alpha C}\exp\left(-\frac{N^2+M^2}{4C}\right)I_\alpha\left(\frac{NM}{2C}\right). \tag{3.2}$$

Dabei ist $J_\alpha(t)$ die Besselfunktion 1.Art, $I_\alpha(t)$ die modifizierte Besselfunktion 1.Art und $\Lambda_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) J_\alpha(t)/t^\alpha$.

Lemma 3.1.1
Es sei $(\mathbb{N}_0, *)$ *eine polynomiale Hypergruppe und* X_n *ein irreduzibler und aperiodischer random walk mit Verteilung* μ. *Dann ist* $|\hat{\mu}(x)| = 1$ *genau dann, wenn* $x = x_0$.

Beweis: Ist $|\hat{\mu}(x)| = 1$, so folgt $\hat{\mu}^{(2n)}(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $|P_n(x)| \leqslant 1$ für alle n ist, folgt $P_k(x) = 1$ für alle $k \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Tr} \mu^{(2n)}$. Da X_n irreduzibel und aperiodisch ist, existiert ein n_0 mit $P_{01}^{(n)} > 0$ für alle $n \geqslant n_0$ ([14], Lemma 1.4.47), d.h. $1 \in \operatorname{Tr} \mu^{(2n_0)}$. Folglich ist $P_1(x) = 1$. Also ist $x = x_0$. □

Wir betrachten zunächst Jacobi-Polynome, da für sie der Beweis einfacher ist als im allgemeinen Fall.

Lemma 3.1.2 (Hilb-Formel)
Für $\alpha > -1, \beta \in \mathbb{R}$ *und* $n \geqslant 1$ *gilt*

$$\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^{\alpha+1/2} (\cos t/2)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos t) = \Lambda_\alpha(Nt) + R_n(t),$$

wobei $N = n + 1/2(\alpha+\beta+1)$ *und* $|R_n(t)| \leqslant Ct^2$ *gleichmäßig auf* $[0, \pi - \varepsilon]$. *Dabei ist* $\varepsilon > 0$ *fest.*

Beweis: Dies folgt aus [36],Theorem 8.21.12 mit

$$R_n(t) = \begin{cases} t^{1/2-\alpha} n^{-3/2-\alpha} O(1) & C_1/n \leqslant t \leqslant \pi - \varepsilon \\ t^2 O(1) & 0 \leqslant t \leqslant C_1/n \end{cases}.$$

Ist nun $t \in [C_1/n, \pi - \varepsilon]$, so ist $n \geqslant C_1/t$ und damit ist

$$|R_n(t)| \leqslant C_2 t^{1/2-\alpha} n^{-3/2-\alpha} \leqslant C_2/C_1^{3/2+\alpha} t^2.$$

□

Definiere

$$V = \{(\alpha,\beta) : (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+4)^2(\alpha+\beta+6) \geqslant (\alpha-\beta)^2[(\alpha+\beta+1)^2 - 7(\alpha+\beta+1) - 24]\}.$$

Bekanntlich erzeugen die Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ eine polynomiale Hypergruppe genau für $(\alpha,\beta) \in V$ ([17],Theorem 3).

Satz 3.1.3
Es sei $(\alpha,\beta) \in V$, X_n eine irreduzible, aperiodische $P_n^{(\alpha,\beta)}$-homogene Markov-Kette mit Verteilung μ und es existiere $\sigma^2 := \int m_2 d\mu$. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}_0} \left| n^{\alpha+1} P_{ij}^{(n)} - \pi_j n^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)2\sigma^2(NM)^\alpha} \exp\left(-\frac{N^2+M^2}{2n\sigma^2}\right) I_\alpha\left(\frac{NM}{n\sigma^2}\right)\right| = 0.$$

Dabei ist $N = i + 1/2(\alpha+\beta+1)$ und $M = j + 1/2(\alpha+\beta+1)$.
Insbesondere gilt für festes i und j:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1} P_{ij}^{(n)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)(2\sigma^2)^{\alpha+1}} \pi_j.$$

Beweis: Setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned} P_n(t) &:= P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos t), \\ \pi'(t) &:= (\sin(t/2))^{2\alpha+1}(\cos(t/2))^{2\beta+1} \end{aligned}$$

und

$$C_j(\alpha,\beta) := \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \pi_j.$$

Mit der Substitution $x = \cos(t/\sqrt{n})$ in der Integraldarstellung für die Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
& n^{\alpha+1} P_{ij}^{(n)} = \\
&= C_j(\alpha,\beta) n^{\alpha+1/2} \int_0^{\pi\sqrt{n}} \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) P_i(t/\sqrt{n}) P_j(t/\sqrt{n}) \pi'(t/\sqrt{n}) dt \\
&= C_j(\alpha,\beta) 2^{-(2\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-\sigma^2 t^2/2} \Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n}) \Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n}) t^{2\alpha+1} dt \\
&\quad + \frac{C_j(\alpha,\beta)}{2^{(2\alpha+1)}} \int_0^A \left[\hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) - e^{-\sigma^2 t^2/2}\right] \Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n}) \Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n}) t^{2\alpha+1} dt \\
&\quad + \frac{C_j(\alpha,\beta)}{2^{(2\alpha+1)}} \int_0^A \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) t^{2\alpha+1} \times \\
&\qquad \left[\frac{\pi'(t/\sqrt{n})}{(t/(2\sqrt{n}))^{2\alpha+1}} P_i(t/\sqrt{n}) P_j(t/\sqrt{n}) - \Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n}) \Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n})\right] dt \\
&\quad - \frac{C_j(\alpha,\beta)}{2^{(2\alpha+1)}} \int_A^\infty e^{-\sigma^2 t^2/2} \Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n}) \Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n}) t^{2\alpha+1} dt \\
&\quad + C_j(\alpha,\beta) n^{\alpha+1/2} \int_A^{r\sqrt{n}} \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) P_i(t/\sqrt{n}) P_j(t/\sqrt{n}) \pi'(t/\sqrt{n}) dt \\
&\quad + C_j(\alpha,\beta) n^{\alpha+1/2} \int_{r\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) P_i(t/\sqrt{n}) P_j(t/\sqrt{n}) \pi'(t/\sqrt{n}) dt
\end{aligned}$$

mit $A > 0$ und $0 < r < \pi$. Mit der Gleichung (3.2) ist also

$$n^{\alpha+1}P_{ij}^{(n)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)2\sigma^2(NM)^{\alpha}}\pi_j n^{\alpha}\exp\left(-\frac{N^2+M^2}{2n\sigma^2}\right)I_{\alpha}(\left(\frac{NM}{n\sigma^2}\right)$$
$$+ I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n)$$

und es bleibt zu zeigen, daß $I_k(n) \to 0$ gleichmäßig in i mit $n \to \infty$ $(k = 1, \ldots, 5)$.
Zu $I_1(n)$:
Eine Taylor-Entwicklung von $\hat{\mu}(\cos t)$ um $t = 0$ (vgl. [43], Theorem 1) zeigt, daß $g_n(t) := \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) - e^{-\sigma^2 t^2/2}$ gleichmäßig auf Kompakta gegen 0 konvergiert mit $n \to \infty$. Damit folgt die Behauptung, da $|\Lambda_\alpha(x)| \leqslant 1$ ist für alle $x \geqslant 0$.
Zu $I_2(n)$:
Setze

$$f_n(t) := \frac{\pi'(t/\sqrt{n})}{(t/(2\sqrt{n}))^{2\alpha+1}}P_i(t/\sqrt{n})P_j(t/\sqrt{n}) - \Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n}).$$

O.E. ist n so groß, daß $A/\sqrt{n} \leqslant \pi - \varepsilon$.
Ist nun $ij > 0$, so folgt mit Lemma 3.1.2 $|f_n(t)| \leqslant \frac{Ct^2}{n}(2 + \frac{Ct^2}{n})$, und damit konvergiert $f_n(t)$ gleichmäßig auf Kompakta gegen 0.
Ist $i = j = 0$, so folgt unmittelbar, daß $|f_n(t)| \to 0$ gleichmäßig auf Kompakta.
Ist schließlich $i = 0$ oder $j = 0$, so folgt die gleichmäßige Konvergenz gegen 0 wieder mit Lemma 3.1.2.
Zu $I_4(n)$:
[43], Theorem 1 und eine Taylor-Entwicklung um $t = 0$ zeigen, daß es ein $0 < r < \pi$ gibt mit $\hat{\mu}(\cos t) \leqslant 1 - \frac{\sigma^2}{4}t^2$ für $0 \leqslant t \leqslant r$. Also ist für $0 \leqslant t \leqslant r\sqrt{n}$

$$\hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) \leqslant \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{4n}\right)^n \leqslant e^{-\sigma^2 t^2/4}.$$

Außerdem existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A > 0$ mit

$$\int_A^\infty e^{-\sigma^2 t^2/4} t^{2\alpha+1} dt < \varepsilon.$$

Wegen $\sin t \leqslant t$ für $t \geqslant 0$ gilt dann gleichmäßig in i

$$|I_4(n)| \leqslant C_j(\alpha,\beta) n^{\alpha+1/2} \int_A^{r\sqrt{n}} e^{-\sigma^2 t^2/4}(t/(2\sqrt{n}))^{2\alpha+1} dt \leqslant \varepsilon C_j(\alpha,\beta).$$

Zu $I_3(n)$:
Mit ε und A wie oben folgt

$$|I_3(n)| \leqslant C_j(\alpha,\beta) 2^{-(2\alpha+1)}\varepsilon$$

gleichmäßig in i.

Zu $I_5(n)$:
Da X_n irreduzibel und aperiodisch ist, existiert ein $\delta(r) > 0$ mit $|\hat{\mu}(\cos t)| \leqslant 1-\delta$ für $t \in [r, \pi]$ (Lemma 3.1.1). Damit folgt

$$\begin{aligned}|I_5(n)| &\leqslant C_j(\alpha,\beta) n^{\alpha+1} \int_r^\pi |\hat{\mu}(\cos t)|^n \sin(t/2)^{2\alpha+1} dt \\ &\leqslant C_j(\alpha,\beta) n^{\alpha+1} (1-\delta)^n \int_r^\pi \sin(t/2)^{2\alpha+1} dt \to 0\end{aligned}$$

gleichmäßig in i.
Schließlich gilt $I_\alpha(x) \approx (\frac{x}{2})^\alpha / \Gamma(\alpha+1)$ mit $x \to 0$ ([1], 9.7.6). Somit ist für festes i und j

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1) 2\sigma^2 (NM)^\alpha} \pi_j n^\alpha \exp\left(-\frac{N^2+M^2}{2n\sigma^2}\right) I_\alpha\left(\frac{NM}{n\sigma^2}\right) = \pi_j \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)(2\sigma^2)^{\alpha+1}}$$

und der Beweis ist vollbracht. □

Bemerkungen:

(i) Für die Tschebyscheff-Polynome 2.Art ($\alpha = \beta = 1/2$) ist Satz 3.1.3 genau [18], Remarque VI.A.13, da $I_{1/2}(x) = (1/2\pi x)^{-1/2} \sinh x$ ([13],(7.11.16)).

(ii) Die Voraussetzung, daß X_n irreduzibel ist, ist notwendig für die Gültigkeit des Satzes. Denn sonst existieren ein $j \in \mathbb{N}_0$ und ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $P_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Ist $(\alpha,\beta) \in V$ und $\alpha \neq \beta$, so ist jede $P_n^{(\alpha,\beta)}$-homogene Markov-Kette X_n irreduzibel und aperiodisch, sofern nur $\mu \neq \delta_0$. Ist nämlich $0 \neq k \in \operatorname{Tr}\mu$, so folgt induktiv $\{0, 1, \ldots, nk\} \subseteq \operatorname{Tr}\mu^{(n)}$. Also ist X_n irreduzibel und aperiodisch wegen Korollar 1.3.2.

(iv) Ist $\alpha = \beta > -1/2$, so ist eine $P_n^{(\alpha,\alpha)}$-homogene Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch genau dann, wenn $\mu(2\mathbb{N}_0) \neq 0$ und $\mu(2\mathbb{N}_0 + 1) \neq 0$. Die Notwendigkeit folgt aus Satz 1.3.1(ii). Mit [18], Proposition VI.34 bleibt nur noch zu zeigen, daß X_n dann aperiodisch ist. Nun existiert unter dieser Voraussetzung ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $2k+1 \in \operatorname{Tr}\mu$. Damit folgt induktiv $\{0, 2, 4, \ldots, 2l(2k+1)\} \subseteq \operatorname{Tr}\mu^{(2l)}$, d.h. $2n \in \operatorname{Tr}\mu^{(2n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $2n \in \operatorname{Tr}\mu$. Also ist $0 \in \operatorname{Tr}\mu^{(2n+1)}$ und somit ist der Zustand 0—und damit X_n—aperiodisch.

(v) Ist $\alpha = \beta > -1/2$ und $\operatorname{Tr}\mu \subseteq 2\mathbb{N}_0 + 1$, so ist X_n zwar irreduzibel, hat aber Periode 2. Ist dann $j - i$ gerade, so gilt die Aussage des Satzes in der Form

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i \in j+2\mathbb{N}_0} \left| (2n)^{\alpha+1} P_{ij}^{(2n)} - \pi_j (2n)^\alpha \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\sigma^2 (NM)^\alpha} \exp\left(-\frac{N^2+M^2}{4n\sigma^2}\right) I_\alpha\left(\frac{NM}{2n\sigma^2}\right) \right| = 0$$

und, falls $j - i$ ungerade ist, in der Form

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i \in j+2\mathbb{N}_0+1} \left| n^{\alpha+1} P_{ij}^{(2n+1)} - \pi_j n^\alpha \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\sigma^2 (NM)^\alpha} \exp\left(-\frac{N^2+M^2}{4n\sigma^2}\right) I_\alpha\left(\frac{NM}{2n\sigma^2}\right) \right| = 0.$$

Dies zeigt man wie oben. Beachte dabei, daß dann $\hat{\mu}(x)^{2n}P_i(x)P_j(x)$ bzw. $\hat{\mu}(x)^{2n+1}P_i(x)P_j(x)$ gerade Funktionen sind, und es somit in der Integraldarstellung genügt, über $[0,1]$ zu integrieren. Darüber hinaus ist $|P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ auf $[0,1]$ ([36], Theorem 7.32.1).

(vi) Die Voraussetzung, daß $(\alpha,\beta) \in V$ ist, d.h. daß die Jacobi-Polynome zu diesen Indizes eine polynomiale Hypergruppe erzeugen, geht auf zweierlei Weise in den obigen Satz ein. Einmal sichert sie, daß $|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqslant 1$ auf $[-1,1]$. Zum Zweiten benötigen wir sie im Beweis von Lemma 3.1.1. Ist nun X_n die einfache Irrfahrt, so gilt offensichtlich $|\hat{\mu}(x)| = 1 \Leftrightarrow x = 1$, falls $\alpha \neq \beta > -1$. Außerdem ist mit [36], Theorem 7.32.1 $|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$ gleichmäßig beschränkt, falls $\alpha \geqslant -1/2$ und $\alpha > \beta > -1$. Diese Überlegung zeigt, daß der Satz für die einfache Irrfahrt gilt, sofern $\alpha \geqslant -1/2$ und $\alpha > \beta > -1$.

Das folgende Korollar ist das Analogon zum lokalen Grenzwertsatz von de-Moivre-Laplace:

Korollar 3.1.4
Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.3 gilt für jede Folge $(j_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $j_n \to \infty$ und $j_n = O(\sqrt{n})$:

$$P_{0j_n}^{(n)} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Phi\left(\frac{j_n}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

wobei

$$\Phi(t) := \frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}t^{2\alpha+1}e^{-t^2/2}.$$

Beweis: Setze zur Abkürzung

$$C(j_n;\alpha,\beta) = \left(\frac{(2j_n+\alpha+\beta+1)\Gamma(j_n+\alpha+1)\Gamma(j_n+\alpha+\beta+1)}{2j_n^{2\alpha+1}\Gamma(j_n+1)\Gamma(j_n+\beta+1)}\right)$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 3.1.3 und der selben Zerlegung der Übergangswahrscheinlichkeiten erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma\sqrt{n}P_{0j_n}^{(n)}}{\Phi(\frac{j_n}{\sigma\sqrt{n}})} &= \frac{(2\sigma^2)^{\alpha+1}}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}C(j_n;\alpha,\beta)\exp\left(\frac{j_n^2}{2n\sigma^2}\right)n^{\alpha+1/2} \\
&\quad\times\int_0^{\pi\sqrt{n}}\hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n}))P_{j_n}(\cos(t/\sqrt{n}))\pi'(t/\sqrt{n})dt \\
&= \frac{(\sigma^2)^{\alpha+1}}{2^\alpha}\frac{C(j_n;\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha+1)}\exp\left(\frac{j_n^2}{2n\sigma^2}\right) \\
&\quad\times\left[\int_0^\infty e^{-\sigma^2t^2/2}\Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n})t^{2\alpha+1}dt + I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)\right] \\
&\quad+\frac{(2\sigma^2)^{\alpha+1}C(j_n;\alpha,\beta)}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\exp\left(\frac{j_n^2}{2n\sigma^2}\right)n^{\alpha+1/2}[I_4(n)+I_5(n)].
\end{aligned}$$

Dabei sind $I_1(n)$–$I_5(n)$ bis auf den Faktor $C_j(\alpha,\beta)$ definiert wie im Beweis von Satz 3.1.3. Nun gilt mit der Asymptotik der Gamma-Funktion:

$$\frac{(\sigma^2)^{\alpha+1}}{2^\alpha}\frac{C(j_n;\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha+1)} \to \frac{(\sigma^2)^{\alpha+1}}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$$

und mit (3.1)

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{j_n^2}{2n\sigma^2}\right)\int_0^\infty e^{-\sigma^2t^2/2}\Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n})t^{2\alpha+1}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)2^\alpha}{(\sigma^2)^{\alpha+1}}.$$

Da $\exp\left(\frac{j_n^2}{2n\sigma^2}\right)$ beschränkt ist, bleibt zu zeigen, daß die übrigen Terme beliebig klein gemacht werden können. Dies wurde aber im obigen Beweis gezeigt. □

Sei jetzt allgemeiner eine polynomiale Hypergruppe gegeben, die den Bedingungen

(i) Die Rekursionskoeffizienten erfüllen $n(a_n - c_n) \to \rho \geqslant 0,\; b_n \to \beta < 1$ und

(ii) π ist absolutstetig auf $[-1,1]$ mit einer stetigen Dichte der Form $\pi'(x) = (1-x^2)^\alpha g(x)$, wobei $g(1) \neq 0$ und $\alpha := \frac{\rho}{1-\beta} - 1/2$

genügt.

Die Jacobi-Polynome erfüllen (i) und die in (ii) definierte Konstante α stimmt mit dem Parameter α überein. Daher gilt für Jacobipolynome mit $\alpha \neq \beta$ (ii) nicht. Beispielklassen orthogonaler Polynome, die diesen Bedingungen genügen und zumindest für bestimmte Parameterbereiche polynomiale Hypergruppen bilden, beschreibt das folgende Lemma. Ein weiteres Beispiel bilden die q-ultrasphärischen Polynome (vgl. [41], 5.3).

Lemma 3.1.5

(i) Besitzt das Orthogonalisierungsmaß des Polynomsystems $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Dichte der Form $\pi'(x) = (1-x^2)^{1/2}Q(x)^{-1}$ mit einem auf $[-1,1]$ strikt positiven Polynom Q vom Grad $r \geqslant 0$, so gilt

(1) $\lim_{n\to\infty} n(a_n - c_n)$ existiert und $\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_n-c_n)}{1-b_n} = 1$.

(2) Es existiert ein $C > 0$ mit $\pi_n \approx Cn^2$.

(ii) Besitzt das Orthogonalisierungsmaß des Polynomsystems $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Dichte der Form $\pi'(x) = (1-x^2)^{-1/2}Q(x)^{-1}$ mit einem auf $[-1,1]$ strikt positiven Polynom Q vom Grad $r \geqslant 0$, so gilt

(1) $\lim_{n\to\infty} n(a_n - c_n)$ existiert und $\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_n-c_n)}{1-b_n} = 0$.

(2) Es existiert ein $C > 0$ mit $\pi_n \leqslant C$.

(iii) Für die assoziierten ultrasphärischen Polynome $\{P_n(x;\alpha,\nu)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\alpha > 0$ und $\nu \geqslant 0$ gilt

(1) $\lim_{n\to\infty} n(a_n - c_n) = \alpha + 1/2$.

(2) Es existiert eine von α *und* ν *abhängige Konstante* $C(\alpha,\nu)$ *mit* $\pi_n \approx C(\alpha,\nu)n^{2\alpha+1}$.

(3) Das Orthogonalisierungsmaß erfüllt (ii).

Beweis:

(i) Es existiert ein trigonometrisches Polynom $H(z) = \sum_{k=0}^{r} h_k z^k$ mit reellen Koeffizienten ohne Nullstellen in $\{|z| \leqslant 1\}$ mit $Q(\cos t) = |H(e^{it})|^2$ und für $2(n+1) > r$ besitzen die orthonormalen Polynome die Darstellung

$$p_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{r} h_k U_{n-k}(x), \tag{3.3}$$

wobei $U_n(x)$ das n-te Tschebyscheff-Polynom der 2.Art ist ([36], Theorem 2.6). Damit ist für $2(n+1) > r$

$$2xp_n(x) = p_{n+1}(x) + p_{n-1}(x)$$

und

$$p_n(1) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left((n+1)H(1) - \sum_{k=0}^{r} kh_k\right).$$

Da 1 der rechte Randpunkt von $\operatorname{Tr}\pi$ ist, ist $p_n(1) > 0$ für alle n. Bezeichnet $P_n(x) := \frac{p_n(x)}{p_n(1)}$ und $p_1(x) = a_0 x + b_0$, so folgt

$$P_1(x)P_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$$

mit

$$a_n = \frac{a_0 p_{n+1}(1)}{2p_1(1)p_n(1)}, \quad b_n = \frac{b_0}{a_0 + b_0}, \quad c_n = \frac{a_0 p_{n-1}(1)}{2p_1(1)p_n(1)}$$

für $2(n+1) > r$. Somit erhält man

$$n(a_n - c_n) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{a_0 n H(1)}{p_1(1)p_n(1)} \to \frac{a_0}{p_1(1)} \qquad \text{und} \qquad \pi_n = Cp_n^2(1).$$

(ii) Der Beweis verläuft wie der von (i). Mit den obigen Bezeichnungen hat man für $2n \geqslant r$ statt (3.3) die Darstellung

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{r} h_k T_{n-k}(x)$$

mit den Tschebyscheff-Polynomen der 1.Art ([36], Theorem 2.6).

(iii) Für $\alpha > 0$ und $\nu \geqslant 0$ ist (vgl. [27], (3.6))

$$n(a_n - c_n) = n(1 - 2c_n) = \frac{n(2\alpha+1)}{2n+2\alpha+2\nu+1} \times$$
$$\times \left(\frac{(2\alpha+1)_{n+1} + (\nu)_{n+1}}{(2\alpha+1)_{n+1} - (\nu)_{n+1}} - \frac{2n(\nu)_{n+1}}{(2n+2\alpha+2\nu+1)((2\alpha+\nu)_{n+1} - (\nu)_{n+1})} \right).$$

Da für $\alpha > 0$ und $\nu \geqslant 0$

$$\frac{(\nu)_{n+1}}{(2\alpha+\nu)_{n+1}} \approx \frac{\Gamma(2\alpha+\nu)}{\Gamma(\nu)n^{2\alpha}}$$

ist, folgt

$$\rho := \lim_{n\to\infty} n(a_n - c_n) = \alpha + 1/2.$$

Mit der gleichen Überlegung folgt die zweite Behauptung aus der expliziten Darstellung von π_n in [27],(3.8).
Schließlich ist ${}_2\mathrm{F}_1(1/2-\alpha,\nu;\nu+\alpha+1/2;z)$ absolut konvergent für $|z| = 1$ ([13], 2.1.1(5)) und ${}_2\mathrm{F}_1(1/2-\alpha,\nu;\nu+\alpha+1/2;1) \neq 0$.

□

Beispiele:

(i) Konkrete Beispiele für den Fall (i) sind neben den Tschebyscheff- Polynomen 2.Art die Geronimus-Polynome (vgl. [25],3(g)(i)) und bestimmte Askey-Wilson-Polynome (vgl. [2],(4.29)). Mit Hilfe der letzteren können isotrope Irrfahrten auf diskreten Halbgruppen als P_n-homogene Markov-Ketten interpretiert werden (siehe dazu [43]).

(ii) Beispiele für Fall (ii) neben den Tschebyscheff-Polynomen 1.Art sind die Griñspun-Polynome und ihre zweiparametrige Erweiterung (vgl [25],3(g)(ii) und [26]).

Satz 3.1.6
Es sei X_n ein irreduzibler und aperiodischer random walk,für dessen Verteilung $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0)$ $\sigma^2 := \sum_{k=0}^{\infty} m_2(k)\mu(\{k\}) < \infty$ existiere. Dann gilt mit α wie in Voraussetzung (ii)

(i) Es existiert ein $n_0 > 0$ und Konstanten C_1, C_2 mit

$$C_1 \leqslant n^{\alpha+1} \int (\hat{\mu}(x))^n P_i(x)P_j(x)d\pi(x) \leqslant C_2$$

für $n \geqslant n_0$ und $0 \leqslant i,j \leqslant [\sqrt{n}]$. Dabei ist $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

(ii) Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant i\leqslant[\sqrt{n}]} \Bigg| n^{\alpha+1} P_{ij}^{(n)} - \pi_j \frac{g(1)\Gamma(\alpha+1)^2 2^{2\alpha}}{\sigma^2} \left(\frac{n}{MN}\right)^{\alpha} \times \exp\left(-\frac{N^2+M^2}{2n\sigma^2}\right) I_\alpha\left(\frac{NM}{n\sigma^2}\right) \Bigg| = 0$$

mit $N := i+\alpha+1$ und $M = j+\alpha+1$. Insbesondere ist für festes i und j

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1} P_{ij}^{(n)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)2^\alpha g(1)}{(\sigma^2)^{\alpha+1}} \pi_j.$$

Beweis: $\hat{\mu}(\cos t)$ ist zweimal differenzierbar und es gilt

$$1 - \hat{\mu}(\cos t) \approx \frac{\sigma^2}{2} t^2 \qquad (t \to 0)$$

([43], Theorem 1). Also existiert ein $0 < r < \pi$ mit

$$\hat{\mu}(\cos t) \leqslant 1 - \frac{\sigma^2}{4} t^2$$

für $0 \leqslant t \leqslant r$. Ferner existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $A > 0$ mit

$$\int_A^\infty e^{-\sigma^2/4t^2} t^{2\alpha+1} dt \leqslant \varepsilon.$$

Mit dieser Wahl von r, A und $L := \operatorname{Tr} \pi \setminus [-1,1]$ zerlegen wir die Integraldarstellung wie folgt

$$\begin{aligned}
& n^{\alpha+1} \int \hat{\mu}^n(x) P_i(x) P_j(x) d\pi(x) \\
&= n^{\alpha+1/2} \int_0^{\pi\sqrt{n}} \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) P_i(\cos(t/\sqrt{n})) P_j(\cos(t/\sqrt{n})) g(\cos(t/\sqrt{n}))(\sin(t/\sqrt{n}))^{2\alpha+1} dt \\
&\quad + n^{\alpha+1} \int_L \hat{\mu}^n(x) P_i(x) P_j(x) d\pi(x) \\
&= g(1) \int_0^\infty e^{-\sigma^2/2t^2} \Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n}) \Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n}) t^{2\alpha+1} dt \\
&\quad + I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n) + I_6(n) \\
&= \frac{g(1) 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha+1)^2}{(NM)^\alpha \sigma^2} n^\alpha \exp\left(-\frac{N^2+M^2}{2n\sigma^2}\right) I_\alpha\left(\frac{NM}{n\sigma^2}\right) \\
&\quad + I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n) + I_6(n).
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$I_1(n) = g(1)\int_0^A \left(\hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) - e^{-\sigma^2/2t^2}\right)\Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n})t^{2\alpha+1}dt$$

$$I_2(n) = -g(1)\int_A^\infty e^{-\sigma^2/2t^2}\Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n})t^{2\alpha+1}dt$$

$$I_3(n) = g(1)\int_0^A \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n}))t^{2\alpha+1} \times$$

$$\left[\left(\frac{\sin(t/\sqrt{n})}{t/\sqrt{n}}\right)^{2\alpha+1} P_i(\cos(t/\sqrt{n}))P_j(\cos(t/\sqrt{n})) - \Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n})\right] dt$$

$$I_4(n) = n^{\alpha+1/2}g(1) \times$$

$$\int_0^A \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n}))P_i(\cos(t/\sqrt{n}))P_j(\cos(t/\sqrt{n}))\left(\frac{g(\cos(t/\sqrt{n}))}{g(1)} - 1\right)(\sin(t/\sqrt{n}))^{2\alpha+1}dt$$

$$I_5(n) =$$

$$n^{\alpha+1/2}\int_A^{r\sqrt{n}} \hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n}))P_i(\cos(t/\sqrt{n}))P_j(\cos(t/\sqrt{n}))(\sin(t/\sqrt{n}))^{2\alpha+1}g(\cos(t/\sqrt{n}))dt$$

$$I_6(n) =$$

$$n^{\alpha+1}\left(\int_L \hat{\mu}^n(x)P_i(x)P_j(x)d\pi(x) + \int_r^\pi \hat{\mu}^n(\cos t)P_i(\cos t)P_j(\cos t)g(\cos t)(\sin t)^{2\alpha+1}dt\right).$$

Wie in Satz 3.1.3 zeigt man, daß $I_1(n), I_2(n)$ gleichmäßig in $i, j \in \mathbb{N}_0$ gegen 0 konvergieren mit $n \to \infty$.

Zu $I_3(n)$:

Setze

$$f_n(t) := \left(\frac{\sin(t/\sqrt{n})}{t/\sqrt{n}}\right)^{2\alpha+1} P_i(\cos(t/\sqrt{n}))P_j(\cos(t/\sqrt{n})) - \Lambda_\alpha(Mt/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(Nt/\sqrt{n}).$$

Mit [45], Corollary 2.3 zeigt man wie im Beweis von Satz 3.1.3, daß $|f_n(t)| \to 0$ gleichmäßig auf Kompakta und gleichmäßig in $0 \leqslant i, j \leqslant [\sqrt{n}]$, und damit folgt $|I_3(n)| \to 0$ gleichmäßig in $0 \leqslant i, j \leqslant [\sqrt{n}]$.

Zu $I_4(n)$:

Setze

$$f_n(t) := n^{\alpha+1/2}\sin(t/\sqrt{n})^{2\alpha+1}\left(\frac{g(\cos(t/\sqrt{n}))}{g(1)} - 1\right).$$

Da nach Voraussetzung g stetig ist und $\sin t \leqslant t$ für $t \geqslant 0$, konvergiert $|f_n(t)|$ gleichmäßig auf Kompakta gegen 0, und damit gilt $|I_4(n)| \to 0$ gleichmäßig in $i, j \in \mathbb{N}_0$.

Zu $I_5(n)$:

Es ist für $0 \leqslant t \leqslant r\sqrt{n}$

$$\hat{\mu}^n(\cos(t/\sqrt{n})) \leqslant \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{4n}\right)^n \leqslant e^{-\sigma^2 t^2/4}.$$

und

$$|g(\cos(t/\sqrt{n}))| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant r} |g(\cos t)|.$$

Ferner existiert zu $\varepsilon > 0$ ein n_0 so groß, daß $A < \sqrt{n_0}r$. Damit ist

$$|I_5(n)| \leqslant n^{\alpha+1/2} \max_{0 \leqslant t \leqslant r} |g(\cos t)| \int_A^{r\sqrt{n}} e^{-\sigma^2 t^2/4} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{2\alpha+1} dt \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant r} |g(\cos t)| \; \varepsilon$$

für $n \geqslant n_0$ gleichmäßig in i, j.
Zu $I_6(n)$:
Mit Lemma 3.1.1 existiert ein $\delta(r) > 0$ mit $|\hat{\mu}(x)| \leqslant 1 - \delta(r)$ für $x \in L \cup [-1, \cos r]$ und somit konvergiert $|I_6(n)|$ gleichmäßig in i, j gegen 0 mit $n \to \infty$.
Das asymptotische Verhalten von $I_\alpha(x)$ um 0 zeigt, daß Konstanten C_1, C_2 und ein $n_0 > 0$ existieren mit

$$C_1 \leqslant \left(\frac{n}{NM}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{N^2 + M^2}{2n\sigma^2}\right) I_\alpha\left(\frac{NM}{n\sigma^2}\right) \leqslant C_2$$

für alle $n \geqslant n_0$ und $0 \leqslant i, j \leqslant [\sqrt{n}]$.
Damit ist (i) bewiesen.
(ii) folgt aus (i) und der Integraldarstellung von $P_{ij}^{(n)}$. □

Bemerkung:
Die Bemerkungen nach Satz 3.1.3 gelten sinngemäß auch hier. Insbesondere kann im Fall der einfachen Irrfahrt auf die Voraussetzung verzichtet werden, daß das zugehörige Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine polynomiale Hypergruppe bildet, falls nur $|P_n(x)|$ auf dem Träger des Orthogonalisierungsmaßes gleichmäßig in n beschränkt ist.

3.2 Lokale Grenzwertsätze für Scheibenpolynome

Definition 3.2.1
Es $\alpha \geqslant 0$ und $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$. Dann heißt die auf der Einheitskreisscheibe
$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\} = \{r\, e^{i\varphi} : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ definierte Funktion

$$R_{m,n}^{(\alpha)}(z) = R_{m,n}^{(\alpha)}(re^{i\varphi}) := e^{i(m-n)\varphi} r^{|m-n|} P_{m \wedge n}^{(\alpha, |m-n|)}(2r^2 - 1), \tag{3.4}$$

wobei $m \wedge n = \min(m, n)$ ist, das *Scheibenpolynom* vom Grad (m, n) zum Exponenten α.

Die Scheibenpolynome $\{R_{n,m}^{(\alpha)}(z)\}_{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2}$ bilden eine Familie orthogonaler Polynome in zwei Variablen auf der Einheitskreisscheibe zum Orthogonalisierungsmaß

$$\lambda_\alpha = \frac{\alpha + 1}{\pi}(1 - x^2 - y^2)^\alpha dxdy \qquad (z = x + iy).$$

Mit der Faltung

$$\delta_{m_1,n_1} * \delta_{m_2,n_2} = \sum_{m,n} g(m_1,n_1,m_2,n_2,m,n)\delta_{m,n}$$

($g(m_1,n_1,m_2,n_2,m,n)$ die Linearisierungskoeffizienten), der Involution $(m,n)^- = (n,m)$ und dem neutralen Element $(0,0)$ erzeugen sie für $\alpha \geqslant 0$ eine polynomiale Hypergruppe in zwei Variablen auf $\mathbb{N}_0^2$ ([49],(3.4)).
Wie für orthogonale Polynome in einer Variablen bezeichnet

$$\pi_{k,l} := \left(\int_D |R_{k,l}^{(\alpha)}(z)|^2 \lambda_\alpha(dz) \right)^{-1}.$$

Für $\alpha \geqslant 0$ und $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0^2)$ heißt dann jede Markov-Kette S_n mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0^2$ und der Übergangsmatrix

$$P_{(i,j)(k,l)} = P(S_{n+1} = (k,l)|S_n = (i,j)) = \delta_{(i,j)} * \mu(\{(k,l)\})$$

random walk (mit Verteilung μ).

Bemerkung:
Wählt man speziell $\mu = 1/2(\delta_{0,1} + \delta_{1,0})$, so erhält man die Markov-Kette auf $\mathbb{N}_0^2$ mit den Übergangswahrscheinlichkeiten ([6], 2.16)

$$P_{(c,d)(k,l)} = \begin{cases} \frac{\alpha+c+1}{2(\alpha+c+d+1)} & \text{, falls}(k,l) = (c+1,d) \\ \frac{c}{2(\alpha+c+d+1)} & \text{, falls}(k,l) = (c-1,d) \\ \frac{\alpha+d+1}{2(\alpha+c+d+1)} & \text{, falls}(k,l) = (c,d+1) \\ \frac{d}{2(\alpha+c+d+1)} & \text{, falls}(k,l) = (c,d-1) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die zur stochastischen Modellierung eines linearen Räuber-Beute-Modells verwendet werden kann.

Lemma 3.2.2
Es sei $\alpha > 0$ und $S_n = (X_n, Y_n)$ ein random walk auf $\mathbb{N}_0^2$ mit der Verteilung μ. Dann besitzt die Übergangsmatrix von S_n die Integraldarstellung

$$P_{(c,d)(k,l)}^{(n)} = \pi_{k,l} \int_D \hat{\mu}^n(z) \overline{R_{c,d}^\alpha(z)} R_{k,l}^\alpha(z) d\lambda_\alpha(z). \tag{3.5}$$

Beweis: Für festes $(c,d) \in \mathbb{N}_0^2$ ist die Fouriertransformierte $\widehat{\delta_{(c,d)} * \mu^{(n)}}(z)$ integrierbar bezüglich λ_α, dem Plancherel-Maß auf $\hat{\mathbb{N}}_0^2$. Mit dem Inversionssatz für die Fouriertransformierte folgt

$$\begin{aligned} P_{(c,d)(k,l)}^{(n)} &= \pi_{k,l} \int_D \widehat{\delta_{(c,d)} * \mu^{(n)}}(z) R_{k,l}^{(\alpha)}(z) \lambda_\alpha(dz) \\ &= \pi_{k,l} \int_D \hat{\mu}^n(z) \overline{R_{c,d}^\alpha(z)} R_{k,l}^\alpha(z) d\lambda_\alpha(z). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.3
Es sei $\alpha > 0$ und $S_n = (X_n, Y_n)$ ein irreduzibler und aperiodischer random walk auf $\mathbb{N}_0^2$ mit der Verteilung μ.

(i) $\pi(S_n) = X_n - Y_n$ *ist eine irreduzible und aperiodische Markov-Kette auf* $\mathbb{Z}$.

(ii) $|\hat{\mu}(\cos t e^{i\varphi})| = 1 \Leftrightarrow t = 0 = \varphi$

Beweis:

(i) Da S_n irreduzibel ist, ist $\mathbb{N}_0^2$ die kleinste Unterhypergruppe, die von $\operatorname{Tr}\mu$ erzeugt wird ([16], Prop. 2.11).
$\pi(x,y) := x - y$ ist ein Homomorphismus zwischen den Hypergruppen $\mathbb{N}_0^2$ und $\mathbb{Z}$ ([6], Proposition 5.1)und $\pi(S_n)$ ist eine Markov-Kette auf $\mathbb{Z}$ ([6], Theoreme 1); damit ist $\mathbb{Z}$ die kleinste Untergruppe,die von $\operatorname{Tr}\pi(\mu)$ erzeugt wird, und $\pi(S_n)$ ist irreduzibel.
Angenommen, $\pi(S_n)$ ist periodisch mit der Periode $d > 1$. Dann ist $\pi(\mu^{(n)})(0) = 0$ für alle n mit $d \not| n$, d.h.

$$0 = \pi(\mu^{(n)}(0)) = \mu^{(n)}(\pi^{-1}(0)) \geqslant \mu^{(n)}((0,0)) \geqslant 0.$$

Also ist $P^{(n)}_{(0,0)(0,0)} = 0$ für alle n mit $d \not| n$, im Widerspruch zur Aperiodizität von S_n.

(ii) Es ist

$$|R^{(\alpha)}_{m,n}(\cos t e^{i\varphi})| = (\cos t)^{|m-n|} |R^{(\alpha,|m-n|)}_{m\wedge n}(\cos 2t)| < 1$$

für $0 < t \leqslant \pi/2$. Also ist $|\hat{\mu}(\cos t e^{i\varphi})| < 1$, falls $t > 0$.
Weiterhin ist

$$|\hat{\mu}(e^{i\varphi})| = |\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_0^2} \mu(\{(m,n)\}) e^{i(m-n)\varphi}| = |\mathcal{F}(\pi(\mu))(\varphi)|,$$

wobei $\mathcal{F}$ die gewöhnliche Fouriertransformation auf $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Mit Teil (i) ist dann $\pi(S_n)$ in der Terminologie von [35] stark aperiodisch (siehe [35], D 2.2 und D 5.1). Damit liefert [35], P 7.8, daß $|\hat{\mu}(e^{i\varphi})| = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$.

□

Satz 3.2.4
Es sei $\alpha > 0$ und es sei ein Maß $\mu \in M^1(\mathbb{N}_0^2)$ gegeben, das den Bedingungen

(i) $\sum_{m,n} (m-n)\mu_{m,n} = 0$,

(ii) $\sum_{m,n} (m-n)^2 \mu_{m,n} =: a < \infty$,

(iii) $\sum_{m,n} \left(\frac{2mn}{\alpha+1} + m + n\right) \mu_{m,n} =: b < \infty$,

(iv) der random walk mit Verteilung μ ist irreduzibel und aperiodisch

genügt. Dann gilt für alle $(k,l) \in \mathbb{N}_0^2$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{c\leqslant\sqrt{n}\\ d\leqslant\sqrt{n}}} \Bigg| n^{\alpha+3/2} P^{(n)}_{(c,d)(k,l)} - \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2a\pi}\, b(\beta_{cd}\beta_{kl})^{\alpha}} \pi_{k,l} n^{\alpha} \times$$

$$\exp\left(-\frac{(d-c+k-l)^2}{2an} - \frac{\beta_{cd}^2+\beta_{kl}^2}{2bn}\right) I_\alpha\left(\frac{\beta_{cd}\beta_{kl}}{bn}\right) \Bigg| = 0.$$

Hierbei ist $\beta_{kl} := \sqrt{(2k+\alpha+1)(2l+\alpha+1)}$.
Insbesondere ist für $(c,d)(k,l)$ *fest:*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+3/2} P^{(n)}_{(c,d)(k,l)} = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha)}{\sqrt{\pi}\, b^{\alpha+1}} \pi_{k,l}.$$

Beweis: Der Beweis benutzt wieder eine Hilb-Formel und die Integraldarstellung (3.5) der Übergangswahrscheinlichkeiten. Zur Abkürzung sei

$$\hat{\mu}(t,\varphi) := \hat{\mu}(\cos t e^{i\varphi}) \qquad R_{c,d}(t,\varphi) := R^{(\alpha)}_{c,d}(\cos t e^{i\varphi})$$

und

$$f_n(t,\varphi) :=$$
$$\hat{\mu}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})^n R_{c,d}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n}) \overline{R_{k,l}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})} \cos(t/\sqrt{n}) \sin^{2\alpha+1}(t/\sqrt{n}).$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, daß es nur auf das Verhalten des Integranden in einer Umgebung von $(1,1)$ ankommt. Sodann wird das asymptotische Verhalten in dieser Umgebung bestimmt.
Es ist für $c,d,k,l \in \mathbb{N}_0^2$

$$\begin{aligned}
n^{\alpha+3/2} P^{(n)}_{(c,d)(k,l)} &= \frac{n^{\alpha+1/2}\pi_{k,l}(\alpha+1)}{\pi} \left(\int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\pi\sqrt{n}/2} f_n(t,\varphi)\, dt\, d\varphi \right) \\
&= \frac{n^{\alpha+1/2}\pi_{k,l}(\alpha+1)}{\pi} \Bigg(\int_{-A}^{A}\int_0^B f_n(t,\varphi)\, dt\, d\varphi + \\
&\quad + \left(\int_{-A}^{A}\int_B^{r\sqrt{n}} f_n(t,\varphi)\, dt\, d\varphi + \int_{[-s\sqrt{n},-A]\cup[A,s\sqrt{n}]} \int_0^{r\sqrt{n}} f_n(t,\varphi)\, dt\, d\varphi \right) \\
&\quad + \left(\int_{-s\sqrt{n}}^{s\sqrt{n}}\int_{r\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}/2} f_n(t,\varphi)\, dt\, d\varphi + \int_{[-\pi\sqrt{n},-s\sqrt{n}]\cup[s\sqrt{n},\pi\sqrt{n}]} \int_0^{\pi/2} f_n(t,\varphi)\, dt\, d\varphi \right)\Bigg) \\
&= \frac{n^{\alpha+1/2}\pi_{k,l}(\alpha+1)}{\pi} \left(I_1(n) + I_2(n) + I_3(n)\right).
\end{aligned}$$

Nun können die Konstanten A, B, r, s so gewählt werden, daß $n^{\alpha+1/2} I_2(n)$ und $n^{\alpha+1/2} I_3(n)$ mit $n\to\infty$ gleichmäßig in (c,d) gegen 0 konvergieren.

Aus der Taylor-Entwicklung von $\hat{\mu}(t,\varphi)$ um $(0,0)$ folgt, daß $0 < r < \pi/2$ und $0 < s < \pi$ existieren mit $\hat{\mu}(t,\varphi) \leqslant 1 - \frac{1}{4}(a\varphi^2 + bt^2)$ für $0 \leqslant t \leqslant r$ und $0 \leqslant \varphi \leqslant s$. Außerdem existieren zu $\varepsilon > 0$ $A > 0$ und $B > 0$ mit

$$\int_B^\infty e^{-bt^2/4} t^{2\alpha+1} dt < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \int_{[-A,A]^c} e^{-a\varphi^2/2} d\varphi < \varepsilon.$$

Mit dieser Wahl von A, B, r, s gilt auf
$[B, r\sqrt{n}] \times [-A, A] \cup [0, r\sqrt{n}] \times \{[-s\sqrt{n}, -A] \cup [A, s\sqrt{n}]\}$

$$\hat{\mu}(t/\sqrt{n}, \varphi/\sqrt{n})^n \leqslant \left(1 - \frac{1}{4n}(bt^2 + a\varphi^2)\right)^n \leqslant e^{-bt^2/4} e^{-a\varphi^2/4}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |n^{\alpha+1/2} I_2(n)| &\leqslant n^{\alpha+1/2} \Big(\int_{-A}^{A} e^{-a\varphi^2/4} d\varphi \int_B^\infty e^{-bt^2/4} (t/\sqrt{n})^{2\alpha+1} dt + \\ &\quad \int_{[-A,A]^c} e^{-a\varphi^2/4} d\varphi \int_0^\infty e^{-bt^2/4} (t/\sqrt{n})^{2\alpha+1} dt \Big) \\ &\leqslant C\varepsilon \end{aligned}$$

gleichmäßig in (c, d).
Mit Lemma 3.2.3 existiert ein $\delta > 0$ mit $|\hat{\mu}(t,\varphi)| \leqslant 1 - \delta$, falls $r < t \leqslant \pi/2$ oder $s < |\varphi| \leqslant \pi$ und es folgt

$$\begin{aligned} |n^{\alpha+1/2} I_3(n)| \leqslant n^{\alpha+3/2} \Big(&\int_{-s}^{s} \int_r^{\pi/2} |\hat{\mu}(t,\varphi)|^n \sin^{2\alpha+1} t dt d\varphi + \\ &\int_{s \leqslant |\varphi| \leqslant \pi} \int_0^{\pi/2} |\hat{\mu}(t,\varphi)|^n \sin^{2\alpha+1} t dt d\varphi \Big) \\ \leqslant\ & C(1-\delta)^n n^{\alpha+3/2}. \end{aligned}$$

Daher gilt auch $|I_3(n)| \to 0$ gleichmäßig in (c, d) mit $n \to \infty$.
Es bleibt zu zeigen, daß $I_1(n)$ das richtige asymptotische Verhalten hat. Dazu zerlegen wir $I_1(n)$:

$$\begin{aligned} & n^{\alpha+1/2} \int_{-A}^{A} \int_0^B f_n(t,\varphi) dt d\varphi = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\varphi^2/2} e^{i\varphi/\sqrt{n}(d-c+k-l)} d\varphi \int_0^\infty e^{-bt^2/2} \Lambda_\alpha(\beta_{c,d} t/\sqrt{n}) \Lambda_\alpha(\beta_{k,l} t/\sqrt{n}) t^{2\alpha+1} dt \\ & + J_1(n) + J_2(n) + J_3(n) + J_4(n) \\ & = \frac{2^{2\alpha+1/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{a\pi} b (\beta_{cd}\beta_{kl})^\alpha} n^\alpha e^{-(d-c+k-l)^2/(2\alpha n)} e^{-\frac{\beta_{cd}^2 + \beta_{kl}^2}{2nb}} I_\alpha\left(\frac{\beta_{cd}\beta_{kl}}{2bn}\right) \\ & \quad + J_1(n) + J_2(n) + J_3(n) + J_4(n). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$J_1(n) =$$
$$\int_{-A}^{A}\int_{0}^{B}\left[\hat{\mu}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})^n - e^{-a/2\varphi^2}e^{b/2t^2}\right]e^{i\varphi/\sqrt{n}(d-c+k-l)}\times$$
$$\Lambda_\alpha(\beta_{c,d}t/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(\beta_{k,l}t/\sqrt{n})t^{2\alpha+1}dtd\varphi$$
$$J_2(n) =$$
$$\int_{-A}^{A}\int_{0}^{B}\hat{\mu}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})^n e^{i\varphi/\sqrt{n}(d-c+k-l)}\times$$
$$\left[\left(\frac{\sin t/\sqrt{n}}{t/\sqrt{n}}\right)^{2\alpha+1}R_{c,d}(t/\sqrt{n},0)R_{k,l}(t/\sqrt{n},0)\cos t/\sqrt{n} - \Lambda_\alpha(\beta_{c,d}t/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(\beta_{k,l}t/\sqrt{n})\right]dtd\varphi$$
$$J_3(n) =$$
$$\int_{[-A,A]^c}\int_{0}^{B}e^{i\varphi/\sqrt{n}(d-c+k-l)-a\varphi^2/2-bt^2/2}\Lambda_\alpha(\beta_{c,d}t/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(\beta_{k,l}t/\sqrt{n})t^{2\alpha+1}dtd\varphi$$
$$J_4(n) =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{B}^{\infty}e^{i\varphi/\sqrt{n}(d-c+k-l)-a\varphi^2/2-bt^2/2}\Lambda_\alpha(\beta_{c,d}t/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(\beta_{k,l}t/\sqrt{n})t^{2\alpha+1}dtd\varphi.$$

Bei dieser Zerlegung haben wir benutzt, daß wegen Gleichung 3.4

$$R_{c,d}(t,\varphi) = e^{i(c-d)\varphi}R_{c,d}(t,0)$$

ist.
Der Beweis ist beendet, wenn gezeigt ist, daß $J_i(n) \to 0$ mit $n \to \infty$.
Für $J_3(n)$ und $J_4(n)$ ist dies klar.
Es gilt $J_1(n) \to 0$ mit $n \to \infty$, denn $\hat{\mu}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})^n$ konvergiert gleichmäßig auf Kompakta gegen $e^{-a\varphi^2/2}e^{-bt^2/2}$. Für den Beweis der letzten Behauptung setze

$$f_n(t) :=$$
$$\left(\frac{\sin t/\sqrt{n}}{t/\sqrt{n}}\right)^{2\alpha+1}R_{c,d}(t/\sqrt{n},0)R_{k,l}(t/\sqrt{n},0)\cos t/\sqrt{n} - \Lambda_\alpha(\beta_{c,d}t/\sqrt{n})\Lambda_\alpha(\beta_{k,l}t/\sqrt{n}).$$

und zeige, daß

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\substack{c\leqslant\sqrt{n}\\ d\leqslant\sqrt{n}}}|f_n(t)| = 0$$

gleichmäßig auf Kompakta.
Dies ist trivial, falls $c = d = k = l = 0$.
Ist $cdkl > 0$, so liefert die Hilb-Formel für Scheibenpolynome ([5], Theorem 1) Konstanten C_1–C_4 mit

$$|f_n(t)| \leqslant C_1t^2/n+C_2((c-d)^2+(k-l)^2)t^4/n^2+C_3t^4/n^2+C_4((c-d)^2+(k-l)^2)t^8/n^4.$$

Ist z.B. $c = 0$ und $dkl > 0$, so ist wieder mit [5], Theorem 1

$$|f_n(t)| \leqslant \left| \left(\frac{\sin t/\sqrt{n}}{t/\sqrt{n}} \right)^{\alpha+1/2} - \Lambda_\alpha(\beta_{0d} t/\sqrt{n}) \right| + C_1 t^2/n + C_2(k-l)^2 t^4/n^2.$$

Ähnliche Abschätzungen ergeben sich auch in den übrigen Fällen und die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung:
Die Voraussetzungen (i)–(iii) sind gerade die Bedingungen, unter denen der zentrale Grenzwertsatz für Scheibenpolynome, [6], Theoreme 3, gilt.

Der oben angesprochenen random walk zur Verteilung $\mu = 1/2(\delta_{(1,0)} + \delta_{(0,1)}$ ist periodisch. Daher ist Satz 3.2.4 nicht anwendbar. Es gilt aber

Korollar 3.2.5
Sei $\alpha > 0$ und S_n der random walk zur Verteilung $\mu = 1/2(\delta_{(1,0)} + \delta_{(0,1)}$. Sind $c-k$ und $d-l$ beide gerade oder beide ungerade, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \Bigg| (2n)^{\alpha+3/2} P^{(2n)}_{(c,d)(k,l)} - \frac{2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{2\pi}(\beta_{cd}\beta_{kl})^\alpha} \pi_{k,l} n^\alpha \times \\ \exp\left(-\frac{(d-c+k-l)^2}{n} - \frac{\beta_{cd}^2 + \beta_{kl}^2}{2n} \right) I_\alpha \left(\frac{\beta_{cd}\beta_{kl}}{n} \right) \Bigg| = 0$$

mit $\beta_{cd} = \sqrt{(2c+\alpha+1)(2d+\alpha+1)}$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}(2n)^{\alpha+3/2} P^{(2n)}_{(c,d)(k,l)} =& 4(\alpha+1)\pi_{k,l} \left(\frac{\sqrt{2n}4\pi}{\int} {}_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^{2n} e^{i(d-c+k-l)x} dx \right) \\ & \left((2n)^{2\alpha+1} \int_0^{\pi/2} (\cos y)^{2n+1} (\sin y)^{2\alpha+1} R^{(\alpha)}_{c,d}(\cos y) R^{(\alpha)}_{k,l}(\cos y) dy \right) \\ =& 4(\alpha+1)\pi_{k,l} I_1(n) I_2(n).\end{aligned}$$

Zu $I_1(n)$:
Es gilt

$$I_1(n) = \frac{\sqrt{2n}}{2} P(\sum_{k=1}^n X_k = d-c+k-l),$$

wobei X_k unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$ und der gemeinsamen Verteilung $\mu = 1/4\delta_{-2} + 1/2\delta_0 + 1/4\delta_2$ sind. Der klassische lokale Grenzwertsatz ([19], Theorem 4.2.1) liefert

$$\lim_{n\to\infty} \left| I_1(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(d-c+k-l)^2/n) \right| = 0$$

gleichmäßig in c, d, k, l.
Zu $I_2(n)$:
Man zeigt ähnlich wie im obigen Beweis, daß

$$\lim_{n\to\infty}\left|I_2(n)-\frac{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)^2}{(\beta_{cd}\beta_{kl})^\alpha}n^\alpha\exp\left(-\frac{\beta_{cd}^2+\beta_{kl}^2}{2n}\right)I_\alpha\left(\frac{\beta_{cd}\beta_{kl}}{n}\right)\right|=0.$$

□

Korollar 3.2.6
Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.2.4 erfüllt. Sind k_n, l_n Folgen natürlicher Zahlen mit $k_n \to \infty,\ l_n \to \infty$ und $k_n, l_n = O(\sqrt{n})$, so gilt

$$P^{(n)}_{(0,0)(k_n,l_n)} \approx \frac{1}{n}\Phi_{a,b}\left(\frac{k_n}{\sqrt{n}}, \frac{l_n}{\sqrt{n}}\right)$$

mit

$$\Phi_{a,b}(x,y)=\frac{2^{\alpha+1}}{\sqrt{2\pi a}b^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}(xy)^\alpha(x+y)e^{-2xy/b}e^{-\frac{(x-y)^2}{2a}}.$$

Beweis: Mit den Abkürzungen aus dem Beweis von Satz 3.2.4 ist

$$\frac{nP^{(n)}_{(0,0)(k_n,l_n)}}{\Phi_{a,b}(\frac{k_n}{\sqrt{n}},\frac{k_n}{\sqrt{n}})}=\frac{\sqrt{2a}b^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)\pi_{k_n,l_n}}{\sqrt{\pi}2^{\alpha+1}(k_n,l_n)^\alpha(k_n+l_n)}n^{\alpha+1/2}e^{\frac{2k_nl_n}{2bn}}e^{\frac{(k_n-l_n)^2}{2an}}\times$$
$$\int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}}\int_0^{\pi\sqrt{n}/2}\hat{\mu}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})^nR_{k_n,l_n}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})\cos t/\sqrt{n}\sin^{2\alpha+1}t/\sqrt{n}dtd\varphi.$$

Da

$$\pi_{k_n,l_n}=\frac{(k_n+l_n+\alpha+1)\Gamma(k_n+\alpha+1)\Gamma(l_n+\alpha+1)}{k_n!l_n!\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}$$

ist ([6],(2.3)), folgt mit der Asymptotik der Gamma-Funktion

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2a}b^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)\pi_{k_n,l_n}}{\sqrt{\pi}2^{\alpha+1}(k_n,l_n)^\alpha(k_n+l_n)}n^{\alpha+1/2}=\frac{\sqrt{2a}b^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}.$$

Also bleibt zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2a}b^{\alpha+1}}{\sqrt{\pi}2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}e^{\frac{2k_nl_n}{2bn}}e^{\frac{(k_n-l_n)^2}{2an}}\int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}}\int_0^{\pi\sqrt{n}/2}\hat{\mu}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})^n\times$$
$$R_{k_n,l_n}(t/\sqrt{n},\varphi/\sqrt{n})\cos t/\sqrt{n}\sin^{2\alpha+1}t/\sqrt{n}dtd\varphi=1.$$

Dies folgt aber wie im Beweis von Satz 3.2.4, wenn man (3.1) und $k_n, l_n = O(\sqrt{n})$ beachtet. □

3.3 Ein Analogon zum Integral-Test von Dvoretzky-Erdös

Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine transiente Markov-Kette auf $\mathbb{N}_0$, so gilt $X_n \to \infty$ P-fast sicher. Daher ist die Geschwindigkeit, mit der X_n divergiert, von Interesse.
In [15] wird für die einfache Irrfahrt bezüglich der Gegenbauer-Polynome ein Analogon zum Integral-Test von Dvoretzky-Erdös bewiesen. Mit Hilfe der Sätze aus Abschnitt 3.1 können wir dieses Resultat erweitern.

Es sei also $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Polynomsystem, das den Voraussetzungen

(a) die Rekursionskoeffizienten erfüllen $n(a_n - c_n) \to \rho \geqslant 0,\ b_n \to \beta < 1$ und $\alpha := \frac{\rho}{1-\beta} - 1/2 > 0$,

(b) das Orthogonalisierungsmaß π ist absolutstetig auf $[-1,1]$ mit einer stetigen Dichte der Form $\pi'(x) = (1-x^2)^\alpha g(x)$, wobei $g(1) \neq 0$,

(c) es existiert ein $r_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $\pi_r \sim r^{2\alpha+1}$ für $r \geqslant r_0$,

(d) $|P_n(x)|$ ist gleichmäßig beschränkt auf $\operatorname{Tr}\pi$

genügt und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die einfache Irrfahrt bezüglich dieses Polynomsystems.

Bemerkung:
Ist $b_n \equiv 0$, so ist Bedingung (c) erfüllt, falls statt (a) die stärkere Bedingung

$$\text{Die Folge } \{n^\lambda(a_n - c_n) - \rho\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt und } \rho > 1/2$$

mit $0 < \lambda \leqslant 1$ gilt, die z.B. für die q-ultrasphärischen Polynome mit $\lambda = 1$ gilt([41], (5.3). Aus dieser Bedingung folgt nämlich

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{n+2\rho}{n} + O(n^{-(1+\lambda)})$$

und damit $\pi_n \approx Cn^{2\rho}$ mit einer Konstanten $C > 0$.

Da $\alpha > 0$ ist, ist X_n transient. Dann ist bekanntlich für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$G_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} < \infty.$$

Es werden zunächst einige Lemmata benötigt, mit deren Hilfe die Wahrscheinlichkeit $Q(r,T)$ abgeschätzt wird, mit der X_n nach dem Zeitpunkt T das Intervall $[0,r]$ aufsucht.

Lemma 3.3.1
Für $r, T \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$Q(r,T) := P(X_n \leqslant r \textit{ für ein } n \geqslant T \mid X_0 = 0).$$

Dann gilt

$$Q(r,T) = \frac{1}{G_{rr}} \sum_{n=T}^{\infty} P_{0r}^{(n)}.$$

Beweis: Da sich X_n nur in direkten Nachbarzuständen von X_{n-1} befinden kann und eine zeitlich homogene Markov-Kette ist, ist

$$\begin{aligned} Q(r,T) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n \leqslant r \text{ für ein } n \geqslant 0 \mid X_0 = i) P_{0i}^{(T)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = r \text{ für ein } n \geqslant 0 \mid X_0 = i) P_{0i}^{(T)}. \end{aligned}$$

Bezeichnet $\tau_r := \inf\{n \geqslant 0 : X_n = r\}$ den ersten Zeitpunkt, zu dem sich X_n im Zustand r befindet, so gilt bekanntlich (siehe z.B. [14], Theorem I.51)

$$P(X_n = r \text{ für ein } n \geqslant 0 \mid X_0 = i) = P(\tau_r < \infty | X_0 = i) = \frac{G_{ir}}{G_{rr}}.$$

Damit erhält man

$$Q(r,T) = \frac{1}{G_{rr}} \sum_{i=0}^{\infty} G_{ir} P_{0i}^{(T)} = \frac{1}{G_{rr}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ir}^{(n)} P_{0i}^{(T)} = \frac{1}{G_{rr}} \sum_{n=0}^{\infty} P_{0r}^{(n+T)} \frac{1}{G_{rr}} = \sum_{n=T}^{\infty} P_{0r}^{(n)}$$

□

Lemma 3.3.2
Es existieren ein $n_0 > 0$ und Konstanten $C_1, C_2 > 0$ so, daß für alle $n \geqslant n_0$

$$C_1 \leqslant \frac{1}{n} G_{nn} \leqslant C_2$$

gilt.

Beweis: Mit Satz 1.2.2 ist

$$P_{nn}^{(k)} = \pi_n \int (P_1(x))^k P_n^2(x) d\pi(x)$$

und somit (vgl. den Beweis zu Satz 1.4.2)

$$G_{nn} = \frac{\pi_n}{2\alpha} \int \frac{P_n^2(x)}{1-x} d\pi(x).$$

Setze jetzt $R_n(x) := P_n(1-x)$. Dann ist $\{R_n(x)\}$ ein orthogonales Polynomsystem auf $[0, \infty[$ mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} R_0(x) = 1 \qquad & R_1(x) = 1 - 2\alpha x \\ -xR_n(x) \quad &= \tfrac{a_n}{2\alpha} R_{n+1}(x) - \tfrac{a_n + c_n}{2\alpha} R_n(x) + c_n R_{n-1}(x). \end{aligned}$$

[20], (9.5) und (9.6) liefert

$$G_{nn} = \frac{\pi_n}{2\alpha} \int \frac{R_n^2(x)}{x} d\nu(x) = \pi_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_n \pi_n}.$$

Mit Voraussetzung (c) und der bekannten Abschätzung

$$C_1 n^{-\beta} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta+1}} \leqslant C_2 n^{-\beta}$$

für $n \geqslant n_0$ und $\beta > 0$ folgt daraus die Behauptung. □

Lemma 3.3.3
Es existieren $r_0, T_0 \in \mathbb{N}$ mit

(i)

$$Q(r,T) \leqslant C_1 \left(\frac{r}{\sqrt{T}}\right)^{2\alpha}$$

für $r \geqslant r_0$ und $T \geqslant T_0$.

(ii) Ist $T \geqslant T_0$ und $r_0 \leqslant r \leqslant \sqrt{T}$, so gilt

$$C_2 \left(\frac{r}{\sqrt{T}}\right)^{2\alpha} \leqslant Q(r,T).$$

Dabei sind $C_1, C_2 > 0$ von r und T unabhängige Konstanten.

Beweis: Offensichtlich genügt es zu zeigen, daß natürliche Zahlen r_0 und T_0 existieren so, daß (i) und (ii) für $T \geqslant T_0$ und $r_0 \leqslant r \leqslant \sqrt{T}$ gelten.
Im folgenden bezeichnen $C_1, C_2, \ldots$ beliebige positive und von r und T unabhängige Konstanten.
Zunächst existiert wegen Voraussetzung (c) ein $r_0 > 0$ mit

$$C_1 \leqslant \frac{\pi_r}{r^{2\alpha+1}} \leqslant C_2. \tag{3.6}$$

für $r \geqslant r_0$. Wie bereits im Anschluß an seinen Beweis erläutert, gilt Satz 3.1.6 im Fall der einfachen Irrfahrt bereits unter den Bedingungen (a),(b) und (d). Also existiert ein $n_0 > 0$ so, daß für $n > n_0$ und $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{n}$ gilt

$$C_3 \leqslant n^{\alpha+1} \int (P_1(x))^n P_r(x) d\pi(x) \leqslant C_4 \tag{3.7}$$

(vgl. den Beweis von Satz 3.1.6).
Aus (3.6) und (3.7) zusammen folgt: Es existieren $C_5, C_6 > 0$ mit

$$C_5 \leqslant \frac{n^{\alpha+1}}{r^{2\alpha+1}} P_{0r}^{(n)} \leqslant C_6$$

für $n \geqslant n_0$ und $r_0 \leqslant r \leqslant \sqrt{n}$. Mit Lemma 3.3.1,Lemma 3.3.2 und der Abschätzung

$$C_1 n^{-\beta} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta+1}} \leqslant C_2 n^{-\beta}$$

folgt die Behauptung. □

Bemerkung:
Jacobi-Polynome mit $\alpha \neq \beta$ erfüllen zwar Voraussetzung (b) nicht, Lemma 3.3.3 gilt aber trotzdem, falls $\alpha \geqslant -1/2$ und $\alpha > \beta > -1$. Benutze im obigen Beweis nur Satz 3.1.3 statt Satz 3.1.6.

Satz 3.3.4 (Dvoretzky-Erdös-Test)
Für jede monotone Folge $g(n) > 0$ gilt

$$P(X_n \leqslant \sqrt{n} g(n) \textit{ unendlich oft}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\tilde{g}(t)^{2\alpha+1}}{t} dt < \infty$$

und

$$P(X_n \leqslant \sqrt{n} g(n) \textit{ unendlich oft}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^\infty \frac{\tilde{g}(t)^{2\alpha+1}}{t} dt = \infty,$$

wobei $\tilde{g}$ die durch $\tilde{g}(t) := \sum_{n=0}^\infty \mathbf{1}_{[n,n+1[}(t) g(n)$ auf $\mathbb{R}_+$ definierte Funktion ist.

Beweis: Da für die einfache Irrfahrt mit Lemma 1.4.8 die beschränkten harmonischen Funktionen stets konstant sind, folgt dies genau wie in [15] aus Lemma 3.3.3. □

Damit erhalten wir auch das folgende Resultat zur Divergenzrate von X_n:

Korollar 3.3.5
Für jede monotone Folge $g(n) > 0$ ist P-fast sicher

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n} g(n)} = 0 \textit{ oder } +\infty$$

je nachdem, ob

$$\int_0^\infty \frac{\tilde{g}(t)^{2\alpha+1}}{t} dt$$

unendlich oder endlich ist.

Beweis: Dies folgt sofort aus dem obigen Satz, wenn man beachtet, daß sich die dortige Aussage nicht ändert, wenn $g(n)$ durch $Cg(n)$ mit einer strikt positiven Konstanten C ersetzt wird. □

Kapitel 4

Eine Klasse polynomialer Hypergruppen mit asymptotisch periodischen Rekursionskoeffizienten

Gegeben seien $0 < a_1, a_2 < 1$. Setze

$$a_n = \begin{cases} a_1 & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ a_2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad c_n = 1 - a_n.$$

Betrachte nun die orthogonalen Polynomsysteme

$$\begin{aligned} P_0(x; a_1, a_2) = 1 \qquad & P_1(x; a_1, a_2) = x \\ P_1(x; a_1, a_2) P_n(x; a_1, a_2) &= a_n P_{n+1}(x; a_1, a_2) + c_n P_{n-1}(x; a_1, a_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q_0(x; a_1, a_2) = 1 \qquad & Q_1(x; a_1, a_2) = x/a_2 \\ x Q_n(x; a_1, a_2) &= a_n Q_{n+1}(x; a_1, a_2) + c_n Q_{n-1}(x; a_1, a_2). \end{aligned}$$

Das zweite System wird in [21] erwähnt. Die beiden Systeme sollen daher im folgenden *Karlin-McGregor-Polynome der ersten und zweiten Art* (kurz *KMG-Polynome*) genannt werden.

Satz 4.1
Die Linearisierungskoeffizienten der KMG-Polynome erster Art sind gegeben durch

$$g(m,n,n+m) = \begin{cases} a_2 & , n \text{ oder } m \text{ gerade} \\ a_1 & , n \text{ und } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$g(m,n,m+n-2k) = \begin{cases} \left(\frac{c_1c_2}{a_1a_2}\right)^{k/2}(a_2-c_2) & , k \text{ gerade, } n \text{ oder } m \text{ gerade} \\ \left(\frac{c_1c_2}{a_1a_2}\right)^{k/2}(a_1-c_1) & , k \text{ gerade, } n \text{ und } m \text{ ungerade} \\ (\frac{c_2}{a_1})^{(k+1)/2}(\frac{c_1}{a_2})^{(k-1)/2}(a_1-c_1) & , k \text{ ungerade, } n \text{ oder } m \text{ gerade} \\ (\frac{c_2}{a_1})^{(k-1)/2}(\frac{c_1}{a_2})^{(k+1)/2}(a_2-c_2) & , k, n \text{ und } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $1 \leqslant k \leqslant m-1$ *(*$m \geqslant 2$*).*

$$g(m,n,n-m) = \begin{cases} \left(\frac{c_1c_2}{a_1a_2}\right)^{m/2} a_2 & , m \text{ gerade} \\ \left(\frac{c_1c_2}{a_1a_2}\right)^{(m-1)/2} c_2 & , m \text{ ungerade und } n \text{ gerade} \\ \left(\frac{c_1c_2}{a_1a_2}\right)^{(m-1)/2} c_1 & , m \text{ und } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für $m \geqslant 2$.

$g(m,n,n+m-k) = 0$ *für alle* m,n, *falls* $k \geqslant 1$ *ungerade.*

Beweis: Man benutzt die Rekursionsgleichungen für die Linearisierungskoeffizienten $g(m,n,m+n-k)$ aus [25] und führt für n,k fest eine langwierige vollständige Induktion nach m durch. Dabei hat man Fallunterscheidungen zu treffen, je nachdem ob n,m,k gerade oder ungerade sind. □

Bemerkung:
Die KMG-Polynome erster Art bilden also genau dann eine polynomiale Hypergruppe, wenn $a_1 \geqslant 1/2$ und $a_2 \geqslant 1/2$ gilt.

Satz 4.2

(i) *Das Orthogonalisierungsmaß* π *der KMG-Polynome erster Art hat folgende Gestalt:*
Auf den Intervallen $I_1 = [-(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}), -|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|]$ *und* $I_2 = [|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|, \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}]$ *ist* π *absolutstetig mit der Dichte*

$$\pi'(x) = \frac{(4\beta x^2 - (x^2+\beta-\alpha)^2)^{1/2}}{2\pi c_2 x(1-x^2)}.$$

Dabei ist $\alpha := a_1c_2$ *und* $\beta := a_2c_1$. *Der diskrete Anteil ist*

(1) ein Sprung in $x = 0$ der Masse $\frac{a_1 - a_2}{c_2}$, falls $a_1 > a_2$ und

(2) Sprünge in $x = -1$ und $x = 1$ der Masse $\frac{c_1 - a_1 + c_2 - a_2}{4c_2}$, falls $a_1 + a_2 < 1$.

(ii) Die KMG-Polynome erster Art besitzen die Eigenschaft (T) genau dann, wenn $a_1 \geqslant 1/2$ und $a_2 \geqslant 1/2$ ist, d.h. genau dann, wenn sie eine polynomiale Hypergruppe bilden.

(iii) Für die KMG-Polynome 1.Art mit $a_1 \geqslant 1/2$ und $a_2 \geqslant 1/2$ gilt

$$D = [-1,1] \cup \{z \in \mathbb{C} \backslash [-1,1] \ : \ |z^2 - (\alpha+\beta) + \sqrt{(z^2 - (\alpha+\beta))^2 - 4\alpha\beta}| \leqslant 2a_1a_2\}$$

und $D_S = [-1,1]$. Dabei sind α und β wie in (i).

Beweis:

(i) Für ein beliebiges orthogonales Polynomsystem $P_n(x)$ mit Orthogonalisierungsmaß π bezeichne

$$B(z) = \int \frac{d\pi(t)}{z - t} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Tr} \pi$$

die Stieltjes-Transformierte von π. Ist $\operatorname{Tr}\pi$ kompakt, so besitzt $B(z)$ eine Darstellung als Kettenbruch

$$B(z) = \frac{1}{|z - b_1} - \frac{a_0 c_1|}{|z - b_2} - \frac{a_1 c_2|}{z - b_3} - \cdots$$

([36], Theorem 3.5.4). Bezeichnen $P_n^{(1)}$ die 1. assoziierten Polynome und $A(z)$ deren zugehörigen Kettenbruch, so folgt unmittelbar

$$(*) \qquad B(z) = \frac{1}{z - b_1 - a_0 c_1 A(z)}.$$

Sind speziell $P_n(x)$ die Karlin-McGregor-Polynome 1.Art $P_n(x; a_1, a_2)$, so gilt $P_n^{(1)}(x; a_1, a_2) = Q_n(x; a_2, a_1)$. Da $Q_n^{(1)}(x; a_2, a_1) = Q_n(x; a_1, a_2)$ ist, folgt nach zweimaligem Anwenden von $(*)$

$$A(z) = \frac{z^2 + \beta - \alpha + ((z^2 - \alpha + \beta)^2 - 4\beta z^2)^{1/2}}{2\beta z}$$

und somit

$$B(z) = \frac{2c_1\beta z((z^2 - \alpha + \beta)^2 - 4\beta z^2)^{1/2} + 2\beta z^3(2\beta - c_1) + 2\beta c_1 z(\alpha - \beta)}{(z^2(2\beta - c_1) + c_1(\alpha - \beta))^2 - c_1{}^2((z^2 - \alpha + \beta)^2 - 4\beta z^2)}.$$

Nun ist $\beta-\alpha = a_2 - a_1$ und $2\beta - c_1 = c_1(a_2-c_2)$ und daher läßt sich obige Gleichung vereinfachen zu

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{2\beta z[((z^2+a_2-a_1)^2-4\beta z^2)^{1/2}+z^2(a_2-c_2)+(a_1-a_2)]}{c_1[(z^2(a_2-c_2)+(a_1-a_2))^2-((z^2+a_2-a_1)^2-4\beta z^2)]} \\ &= \frac{[(z^2+a_2-a_1)^2-4\beta z^2]^{1/2}+z^2(a_2-c_2)+(a_1-a_2)}{2c_2 z(1-z^2)}. \end{aligned}$$

Mit der Inversionsformel für die Stieltjes-Transformation folgt die Behauptung.

(ii) [37], Corollary 2 ergibt,daß die KMG-Polynome erster Art die Eigenschaft (T) für $a_1 \geqslant 1/2, a_2 \geqslant 1/2$ besitzen. Andererseits rechnet man leicht nach, daß

$$h(3,0) = \frac{1-2c_1}{2-2c_1} \quad \text{und} \quad h(3,1) = \frac{1-2c_2}{2-2c_2}$$

ist. Daher ist die Eigenschaft (T) genau für diesen Parameterbereich gültig.

(iii) Da mit (ii) die Eigenschaft (T) erfüllt ist, ist $[-1,1] \subseteq D_S$. Lemma 2.2.3 zeigt, daß $D_S \cap]1,\infty[= \emptyset$. Da die KMG-Polynome symmetrisch sind, folgt $D_S = [-1,1]$.
Setze weiter

$$A = \{z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1] \ : \ |z^2-(\alpha+\beta)+\sqrt{(z^2-(\alpha+\beta))^2-4\alpha\beta}| \leqslant 2a_1a_2\}.$$

[3], Theorem 1 liefert für $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+2}(z;a_1,a_2)}{P_n(z;a_1,a_2)} = \frac{z^2-(\alpha+\beta)+\sqrt{(z^2-(\alpha+\beta))^2-4\alpha\beta}}{2a_1a_2}.$$

Folglich ist für $z \in A^c \setminus [-1,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{P_{n+2}(z;a_1,a_2)}{P_n(z;a_1,a_2)} \right| > 1$$

und somit $z \notin D$.
Ebenso ist für $z \in A^\circ$ $z \in D$. Da $[-1,1] \subseteq D$, folgt die Behauptung.

□

Bemerkung:
$P_n(x) = P_n(x;1/2,a_2)$ hat die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_{2n}(x) &= \left(\frac{c_2}{a_2}\right)^{n/2} \left(a_2 U_n(\frac{2x^2-1}{2\sqrt{a_2c_2}}) - c_2 U_{n-2}(\frac{2x^2-1}{2\sqrt{a_2c_2}})\right) \quad (n \geqslant 1) \\ P_{2n+1}(x) &= x\left(\frac{c_2}{a_2}\right)^{(n+1)/2} \left(\sqrt{\frac{a_2}{c_2}} U_n(\frac{2x^2-1}{2\sqrt{a_2c_2}}) - U_{n-1}(\frac{2x^2-1}{2\sqrt{a_2c_2}})\right) \quad (n \geqslant 0) \end{aligned}$$

mit den Tschebyscheff-Polynomen 2.Art $U_n(x)$. $P_n(x)$ ist in der Terminologie von [8] das gesiebte random-walk-Polynom erster Art zum Polynomsystem $\{R_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, das die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} R_0(x) &= 1 \quad R_1(x) = x/c_2 \\ xR_n(x) &= c_2 R_{n+1}(x) + a_2 R_{n-1}(x) \end{aligned}$$

besitzt. Durch Einsetzen sieht man, daß

$$R_n(x) = \left(\frac{a_2}{c_2}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2c_2}}\right)$$

ist und die Behauptung folgt aus [8], Corollary 3.2.

Satz 4.3

(i) *Die KMG-Polynome 2.Art bilden für $a_1 \geqslant 1/2$ und $a_2 \geqslant 1/2$ eine polynomiale Hypergruppe. Ist $a_1 \neq a_2$, so sind die Rekursionskoeffizienten von $\tilde{Q}_n(x; a_1, a_2) := \frac{Q_n(x;a_1,a_2)}{Q_n(1;a_1,a_2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch*

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} a_1 \left(1 + \frac{a_2\gamma^{(n+1)/2}(1-\gamma)}{1-\gamma^{(n+1)/2}}\right) & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{a_2(1-\gamma^{n/2+1})}{1-\gamma^{n/2}(c_2+a_2\gamma} & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases} \quad \text{und } \tilde{c}_n = 1 - \tilde{a}_n$$

Dabei ist $\gamma := \frac{c_1c_2}{a_1a_2}$.

(ii) *Für $a_1 \geqslant 1/2$ und $a_2 \geqslant 1/2$ ist für die KMG-Polynome 2.Art die Eigenschaft (T) erfüllt.*

(iii) *Für die KMG-Polynome zweiter Art hat das Orthogonalisierungsmaß π die folgende Gestalt:*
Auf den Intervallen $I_1 = [-(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}), -|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|]$ und $I_2 = [|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}|, \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}]$ ist π absolutstetig mit der Dichte

$$\pi'(x) = \frac{(4\alpha x^2 - (x^2 + \beta - \alpha)^2)^{1/2}}{2\pi\alpha x}.$$

Dabei ist $\alpha := a_1c_2$ und $\beta := a_2c_1$. Der diskrete Anteil ist ein Sprung in $x = 0$ der Masse $\frac{a_1-a_2}{a_1c_2}$, falls $a_1 > a_2$.

(iv) *Ist $a_1 \geqslant 1/2$ und $a_2 \geqslant 1/2$, so ist für die KMG-Polynome 2.Art*

$$D = [-1,1] \cup \{z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1] \ : \ |z^2 - (\alpha+\beta) + \sqrt{(z^2 - (\alpha + \beta))^2 - 4\alpha\beta}| \leqslant 2a_1a_2\}.$$

und $D_S = [-1,1]$.

Beweis:

(i) Die Positivität der Linearisierungskoeffizienten folgt aus [38], Theorem 1. Berechne $Q_n(1; a_1, a_2)$ mit Hilfe von [27], Prop. 1.2. Aus [27](1.10) folgt die zweite Behauptung.

(ii) Dies folgt ebenfalls aus [37], Corollary 2.

(iii) Die Gestalt des Orthogonalisierungsmaß berechnet man wie im Beweis von Satz 4.2. Im Unterschied zu dort ist nur hier

$$B(z) = \frac{(z^2 - \beta + \alpha) + \sqrt{(z^2 - \beta + \alpha)^2 - 4\alpha z^2}}{2\alpha z}.$$

(iv) Es bezeichne $q_n(z)$ das n-te monische KMG-Polynom 2.Art. Dann ist

$$\frac{\tilde{Q}_{n+2}(x; a_1, a_2)}{\tilde{Q}_n(x; a_1, a_2)} = \frac{q_{n+2}(z)}{q_n(z)} \frac{q_n(1)}{q_{n+2}(1)}.$$

Nun gilt ([27],(1.10)):

$$\frac{q_{n+2}(1)}{q_n(1)} = \tilde{a}_{n+1}\tilde{a}_n.$$

Mit Teil (i) und [3], Theorem 1 folgt

$$\frac{\tilde{Q}_{n+2}(x; a_1, a_2)}{\tilde{Q}_n(x; a_1, a_2)} \to \frac{z^2 - (\alpha + \beta) + \sqrt{(z^2 - (\alpha + \beta))^2 - 4\alpha\beta}}{2a_1a_2}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Damit folgt die Behauptung wie in Satz 4.2.

$\square$

Anhang

A.1 Orthogonale Polynome

Gegeben seien Folgen $a_n > 0, b_n \geqslant 0$ und $c_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $a_n + b_n + c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann definiert bekanntlich (Satz von Favard, [9],Theorem 1.3.4)

$$\begin{aligned} P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = a_0 x + b_0 \\ P_1(x)P_n(x) \;=\; a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ein *System orthogonaler Polynome*. Dabei wählen wir a_0 und b_0 stets folgendermaßen:

(i) Falls die Limiten $\lim_{n\to\infty} a_n =: \alpha \in]0,1[, \lim_{n\to\infty} b_n =: \beta$ und $\lim_{n\to\infty} c_n =: \gamma \in]0,1[$ existieren mit $\alpha \geqslant \gamma$, so setze $a_0 := 2\sqrt{\alpha\gamma}$ und $b_0 := \beta$.

(ii) Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, so wähle $a_0 > 0, b_0$ mit $a_0 + b_0 = 1$.

Setze weiter

$$x_0 := \begin{cases} \frac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} & \text{im Fall (i)} \\ 1 & \text{im Fall (ii)} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \theta_0 := \begin{cases} \ln \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} & \text{im Fall (i)} \\ 0 & \text{im Fall (ii)} \end{cases}.$$

Dann gilt $x_0 \geqslant 1,\ \cosh\theta_0 = x_0$ und $P_n(x_0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es bezeichne π das *Orthogonalisierungsmaß* des Polynomsystems $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und

$$\pi_j = \left(\int P_j^2(x)\, d\pi(x) \right)^{-1}.$$

Da a_n, b_n und c_n beschränkt sind, ist $\operatorname{Tr}\pi$ kompakt (siehe [9], Theorem IV.2.2).

Lemma A.1.1
Ist Voraussetzung (i) erfüllt, so ist $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in der Nevai-Klasse $M(0,1)$ enthalten und es gilt $\operatorname{Tr}\pi \subseteq]-\infty, x_0]$.

Beweis: Einen Beweis der ersten Behauptung findet man z.B. in [28]. Zum Beweis des zweiten Teils genügt es zu zeigen, daß $P_n(x) \geqslant 1$ für $x > x_0$ und $n \in \mathbb{N}$. Denn dann sind offensichtlich alle Nullstellen von $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $]-\infty, x_0]$ enthalten und somit auch $\operatorname{Tr}\pi$ ([9], Theorem III.5.8). Nun ist $P_1(x) > 1$ für $x > x_0$ und aus der Rekursionsgleichung, geschrieben in der Form

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{c_n}{a_n}\left(P_n(x) - P_{n-1}(x)\right) + \frac{1}{a_n}\left(P_1(x) - 1\right) P_n(x)$$

folgt induktiv die Behauptung. $\square$ Die *Linearisierungskoeffizienten* $g(m,n,k)$ von $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind durch

$$P_n(x)P_m(x) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} g(m,n,k)P_k(x)$$

eindeutig bestimmt.

Man sagt das Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat die *Eigenschaft (T)*, falls in der Darstellung

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} h(n,k)T_k(x)$$

von $P_n(x)$ bezüglich der Tschebyscheff-Polynome erster Art $h(n,k) \geqslant 0$ für alle n und k ist.

Schließlich setzen wir

$$D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |P_n(z)| \leqslant 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und } D_S = D \cap \mathbb{R}.$$

Man sieht leicht, daß $D_S \subseteq [-\frac{1-b_0}{a_0}, x_0]$.
Falls das Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine polynomiale Hypergruppe bildet und die Voraussetzung (i) erfüllt ist, gilt $[-x_0, x_0] \subseteq D_S$ ([44], Theorem (8.2)).

A.2 Modifizierte Momente

Definition A.2.1
Gegeben sei ein orthogonales Polynomsystem $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie oben.

(i) Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $\theta \in \mathbb{C}$ setze

$$\varphi_{n,\theta}(k) := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n P_k(\cosh t)|_{t=\theta} \quad \text{und} \quad m_n(k) := \varphi_{n,\theta_0}(k).$$

Die Funktionen m_n heißen *Momente*.

(ii) Für jede $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X mit Verteilung μ heißt

$$E_*(X) := E(m_1(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} m_1(n)\mu(\{n\})$$

der *modifizierte Erwartungswert* von X.

Lemma A.2.2
Der modifizierte Erwartungswert hat folgende Eigenschaften:

(i) $m_1(n) \equiv 0$, *falls* $x_0 = 1$, *und* $m_1(n) > 0$, *falls* $x_0 > 1$.

(ii) Ist X_n *eine* P_n*-homogene Markov-Kette mit Verteilung* μ, *so ist* $E_*(X_n) = nE_*(X_1)$.

Einen Beweis dieser Aussagen findet man in [42].

Definition A.2.3
Gegeben sei eine Sturm-Liouville-Hypergruppe wie in Kapitel 2 und φ_λ ihre multiplikativen Funktionen. Dann setzt man wie oben für $x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$ und $\theta \in \mathbb{C}$

$$\phi_{n,\delta}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \varphi_{\delta+it}(x)|_{t=0} \text{ und } m_n(x) := \phi_{n,i\rho}(x).$$

und nennt die Funktionen $m_n(x)$ ebenfalls *Momente*. Genauso heißt

$$E_*(X) := E(m_1(X)) = \int_0^\infty m_1(x)d\mu(x)$$

der modifizierte Erwartungswert der $\mathbb{R}_+$-wertigen Zufallsvariablen X.

In [48] ist bewiesen, daß gilt

Lemma A.2.4
Der modifizierte Erwartungswert hat die Eigenschaften:

(i) $m_1(x) \equiv 0$, *falls* $\rho = 0$, *und* $m_1(x) > 0$, *falls* $\rho > 0$.

(ii) Ist X_n *ein random walk mit Verteilung* μ, *so ist* $E_*(X_n) = nE_*(X_1)$.

A.3 Einige Eigenschaften konvexer Funktionen

Beweise der folgenden Aussagen sind in [12], Kapitel VI oder in [33] zu finden.

Definition A.3.1

(i) $C \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ für alle $x, y \in C$ und $0 < \lambda < 1$. Damit ist $C \subseteq \mathbb{R}$ konvex genau dann, wenn C ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall ist.

(ii) Eine Funktion $f : C \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt *konvex*, falls C konvex ist, $f \not\equiv +\infty$, f nicht den Wert $-\infty$ annimmt und falls für alle $x, y \in C$ und $0 < \lambda < 1$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

gilt. Da eine konvexe Funktion auf C immer durch die Festsetzung $f(x) = +\infty$ für $x \notin C$ zu einer konvexen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann, wird im folgenden immer angenommen, daß f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.
Unter dem *effektiven Definitionsbereich* von f versteht man dann die konvexe Menge

$$\mathrm{dom} f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \infty\}.$$

Satz A.3.2

(i) Eine konvexe Funktion f ist stetig auf $(\mathrm{dom} f)^\circ$.

(ii) Sei f eine konvexe, von unten halbstetige Funktion, $y \in \mathrm{dom} f$ und $x \in rd(\mathrm{dom} f)$. Dann ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in (\mathrm{dom} f)^\circ$ für $0 < \lambda \leqslant 1$ und es gilt

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(y).$$

Definition A.3.3

Sei f konvex auf $\mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

(i) $z \in \mathbb{R}$ heißt *Subgradient* von f in y, falls

$$f(x) \geqslant f(y) + z(x-y) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Das *Subdifferential* von f in y ist die Menge

$$\partial f(y) := \{z \in \mathbb{R} : z \text{ ist Subgradient von } f \text{ in y } \}.$$

(iii) Ist $f(y) < \infty$, so existieren die *rechtsseitige* und die *linksseitige Ableitung* von f in y

$$f'_+(y) = \lim_{x \downarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad , \quad f'_-(y) = \lim_{x \uparrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

als Zahlen in $\bar{\mathbb{R}}$.

Beachte , daß aus der Konvexität von f

$$f'_+(y) = \inf_{x > y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \text{und} \quad f'_-(y) = \sup_{x < y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

folgt.

Satz A.3.4
f sei konvex. Setzt man $f'_+(y) = +\infty = f'_-(y)$ für alle y rechts von $\mathrm{dom} f$ und $f'_+(y) = -\infty = f'_-(y)$ für alle y links von $\mathrm{dom} f$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\partial f(x) = \{z \in \mathbb{R} : f'_-(x) \leqslant z \leqslant f'_+(x)\}.$$

Existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'_+(x_0) = 0$, so ist f monoton wachsend auf $[x_0, +\infty[$ und monoton fallend auf $]-\infty, x_0]$.

Definition A.3.5
Zu einer konvexen Funktion f auf $\mathbb{R}$ heißt

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{xy - f(x)\}$$

die *Legendre-Transformierte* von f.

Satz A.3.6
Sei f eine konvexe, von unten halbstetige Funktion. Dann gilt:

(i) *f^* ist konvex und von unten halbstetig.*

(ii) *$xy \leqslant f(x) + f^*(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.*

(iii) *$xy = f(x) + f^*(y)$ genau dann, wenn $y \in \partial f(x)$.*

(iv) *$y \in \partial f(x)$ genau dann, wenn $x \in \partial f^*(y)$.*

(v) *Ist f endlich und differenzierbar auf $\mathbb{R}$, so gilt*

$$(\mathrm{dom} f^*)^\circ \subseteq \{f'(x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{dom} f^*.$$

Bezeichnungen

Es bezeichnen stets $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ die komplexen, reellen, rationalen und natürlichen Zahlen. Daneben legen wir fest:

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty[$,
$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ist K ein lokalkompakter Raum, so bezeichnet

$M(K)$	die Menge aller komplexen regulären Borelmaße auf K,
$M^+(K)$	die Menge aller positiven regulären Borelmaße auf K,
$M^1(K)$	die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf K und
$\mathcal{B}(K)$	die Borel-σ-Algebra von K.

Das Punktmaß in $x \in K$ bezeichnen wir mit δ_x. Für die charakteristische Funktion der Menge $A \in \mathcal{B}(K)$ schreiben wir $\mathbf{1}_A(x)$.

Ist$A \subseteq K$, so bezeichnet

A°	das Innere von A,
$\bar{A}$	den Abschluß von A,
$\mathrm{rd} A = \bar{A} \setminus A^\circ$	den Rand von A und
$A^c = K \setminus A$	das Komplement von A in K.

Sind $(a_n), (b_n)$ Folgen reeller Zahlen mit $b_n > 0$, so schreiben wir

$a_n \approx b_n$	, falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt und
$a_n \sim b_n$	, falls Konstanten C_1, C_2 existieren mit $C_1 \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant C_2$.

Genauso schreiben wir für rellwertige Funktionen $f(x), g(x)$ mit $g(x) > 0$

$f(x) \approx g(x)$	, falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz and Irene Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1972.

[2] Richard Askey and James Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize jacobi polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 319, Amer. Math. Soc., Princeton R.I., 1985.

[3] Walter Van Assche, *Asymptotic properties of orthogonal polynomials from their recurrence formula I*, J. Approx. Theory (1985), no. 44, 258–276.

[4] Walter R. Bloom and Herbert Heyer, *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, DeGruyter, Berlin, 1995.

[5] Mostafa Bouhaik and Léonard Gallardo, *A mehler-heine formula for disk polynomials*, Indag. Math. (1991), no. 1, 9–18.

[6] ———, *Un théorème limite central dans un hypergroupe bidimmensionnel*, Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist. (1992), no. 28, 47–61.

[7] W. Cegla, J.T. Lewis, and G.A. Raggio, *The free energy of quantum spin systems and large deviations*, Comm. Math. Phys. (1988), no. 118, 337–354.

[8] J. Charris and M.E.H. Ismail, *On sieved orthogonal polynomials II: random walk polynomials*, Canad. J. Math. (1986), no. 2, 397–415.

[9] Ted Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon&Breach, New York, 1978.

[10] J. Deuschel and D. W. Stroock, *Large deviations*, Academic Press, New York, 1989.

[11] Martin Ehring, *A large deviation principle for polynomial hypergroups*, J. London Math. Soc. (2) (1996), no. 53, 197–208.

[12] Richard Ellis, *Entropy, large deviations and statistical mechanics*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1985.

[13] Arthur Erdelyi and other, *Higher transcendental functions*, McGraw Hill, New York, 1953.

[14] David Freedman, *Markov chains*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1983.

[15] Léonard Gallardo, *The rate of escape of a polynomial random walk on* $\mathbb{N}_0^2$, Harmonic Analysis and discrete potential theory (New York) (M. A. Picardello, ed.), Plenum Press, 1992.

[16] Lèornard Gallardo and Olivier Gebuhrer, *Marches alèatoires et hypergroupes*, Exposition. Math. (1987), no. 5, 41–73.

[17] George Gasper, *Positivity and special functions*, Theory and Applications of Special Functions (Richard Askey, ed.), Academic Press, New York, 1975, pp. 375–434.

[18] Yves Guivarc'h, Michael Keane, and Bernard Roynette, *Marches alèatoires sur les groupes de lie*, Lect. Notes in Math., vol. 624, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[19] I.A. Ibregimow and Y.V. Linnik, *Independent and stationary sequences of random variables*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.

[20] Samuel Karlin and James McGregor, *Classification of birth and death processes*, Trans. Amer. Math. Soc. (1957), no. 86, 366–400.

[21] ______, *Random walks*, Illinois J. Math. (1959), no. 3, 66–81.

[22] D. G. Kendall, *Unitary dilations of markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices*, Surveys in Probability and Statistics (Ulf Grenander, ed.), Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1959, pp. 139–161.

[23] J.F.C. Kingman, *The exponential decay of markov transition probabilities*, Proc. London Math. Soc. (3) (1958), no. 13, 337–358.

[24] ______, *Random walks with a spherical symmetry*, Acta Math. (1963), no. 109, 11–53.

[25] Rupert Lasser, *Orthogonal polynomials and hypergroups*, Rend. Mat. (7) (1983), no. 2, 185–209.

[26] ______, *Lacunarity with respect to orthogonal polynomials*, Acta Sci. Math. (Szeged) (1984), no. 47, 391–403.

[27] ______, *Orthogonal polynomials and hypergroups II - the symmetric case*, Trans. Amer. Math. Soc. (1994), no. 341, 749–770.

[28] Rupert Lasser and Margit Rösler, *A note on property (T) of orthogonal polynomials*, Arch. Math. (Basel) (1993), no. 60, 459–463.

[29] D. S. Lubinsky, *A survey of general orthogonal polynomials for weights on finite and infinite intervals*, Acta Appl. Math. (1987), no. 10, 237–296.

[30] Paul Nevai, *Orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 213, Amer. Math. Soc., Princeton R.I., 1979.

[31] F.W.J. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press, New York, 1974.

[32] D. Revuz, *Markov chains*, North Holland, Amsterdam Oxford, 1975.

[33] R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, second ed., Princeton University Press, Princeton, 1972.

[34] Alan L. Schwartz, *l^1-convolution algebras: representation and factorization*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete (1977), no. 41, 161–176.

[35] Frank Spitzer, *Principles of random walk*, Van Nostrand, Princeton, 1964.

[36] Gabor Szegö, *Orthogonal polynomials*, second ed., Amer. Math. Society Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1959.

[37] Richard Szwarc, *Connection coefficients of orthogonal polynomials*, Canad. Math. Bull. (1992), no. 35, 1–9.

[38] ———, *Orthogonal polynomials and a discrete boundary value problem II*, SIAM J. Math. Anal. (1992), no. 23, 965–969.

[39] David Vere-Jones, *Geometric ergodicity in denumerable markov chains*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) (1962), no. 13, 7–28.

[40] Michael Voit, *Positive characters on commutative hypergroups and some applications*, Math. Z. (1988), no. 198, 405–421.

[41] ———, *Central limit theorems for a class of polynomial hypergroups*, Adv. in Appl. Probab. (1990), no. 22, 66–87.

[42] ———, *Central limit theorems for random walks on $\mathbb{N}_0$ that are associated with orthogonal polynomials*, J. Multivariate Anal. (1990), no. 34, 290–322.

[43] ———, *Laws of large numbers for polynomial hypergroups and some applications*, J. Theoret. Probab. (1990), no. 3, 245–266.

[44] ———, *Factorization of probability measures on symmetric hypergroups*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A (1991), no. 50, 417–467.

[45] ———, *A formula of hilb's type for orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. (1993), no. 49, 339–348.

[46] Hansmartin Zeuner, *Lindeberg type central limit theorems on one dimensional hypergroups*, Preprint.

[47] ———, *One-dimensional hypergroups*, Adv. in Math. (1989), no. 76, 1–18.

[48] ———, *Moment functions and laws of large numbers on hypergroups*, Math. Z. (1992), no. 211, 369–407.

[49] ———, *Polynomial hypergroups in several variables*, Arch. Math. (Basel) (1992), no. 58, 425–434.